

I 以下の2次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して $\Phi_A(\lambda) := |\lambda I_2 - A|$ を求め、 $\Phi_A(\alpha) = 0$ を満たすすべての $\alpha \in \mathbf{R}$ にして $(\alpha I_2 - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ をすべて求めましょう。

(1) $A = \begin{pmatrix} -7 & 20 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

解答 (1) QID 1052 $A = \begin{pmatrix} -7 & 20 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$

$$\Phi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda+7 & -20 \\ 4 & \lambda-11 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

と計算されますから考える $\alpha \in \mathbf{R}$ は $\alpha = 1, 3$ であることが分かります。次に固有ベクトルを求めます。

$\alpha = 1$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -20 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x - 5y = 0$$

なので方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ と表せます。

$\alpha = 3$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & -20 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

なので方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せます。

補足

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P = (\vec{p}_1 \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

と定めると以下の一般論から P は正則となり

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となります (対角化されるといいます)。

$A \in M_2(\mathbf{K})$ に対して $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$ の解 $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ が $\alpha \neq \beta$ を満たすとします。このとき

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2 \neq \vec{0}$$

ならば $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ は正則となります。

問題 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{v}_0 := 2\vec{p}_1 + \vec{p}_1, \vec{v}_1 := \vec{p}_1 - 2\vec{p}_2, A\vec{v}_0, A\vec{v}_1$ を図示しましょう。

(2) QID 1053 $A = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

$$\Phi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -12 \\ 2 & \lambda-7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

と計算されますから考える $\alpha \in \mathbf{R}$ は $\alpha = 1, 3$ であることが分かります。

$\alpha = 1$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 3y = 0$$

なので方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せます。

$\alpha = 3$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

なので方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せます。

補足

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と定めると (1) で説明した一般論から P は正則となり

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となります.

問題 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{v}_0 := 2\vec{p}_1 + \vec{p}_1, \vec{v}_1 := \vec{p}_1 - 2\vec{p}_2, A\vec{v}_0, A\vec{v}_1$ を図示しましょう.

(3) QID 1054 $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Phi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 4 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

と計算されますから考える $\alpha \in \mathbf{R}$ は $\alpha = 1, 3$ であることが分かります.

$\alpha = 1$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$$

なので方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せます.

$\alpha = 3$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

なので方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せます. ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と定めると (1) で説明した一般論から P は正則となり

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となります.

問題 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{v}_0 := 2\vec{p}_1 + \vec{p}_1, \vec{v}_1 := \vec{p}_1 - 2\vec{p}_2, A\vec{v}_0, A\vec{v}_1$ を図示しましょう.

II 以下の3次正方行列 $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して $\Phi_A(\lambda) := |\lambda I_3 - A|$ を求め、 $\Phi_A(\alpha) = 0$ を満たす $\alpha \in \mathbf{R}$ にして $(\alpha I_3 - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ をすべて求めましょう。

$$(1) A = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -10 & 5 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ -7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) QID 1030 $A = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -10 & 5 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \Phi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda+7 & -3 & -3 \\ 10 & \lambda-5 & -4 \\ 8 & -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} \stackrel{1r+3r \times (-1)}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 10 & \lambda-5 & -4 \\ 8 & -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 10 & \lambda-5 & -4 \\ 8 & -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-5 & 6 \\ 0 & -3 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda-5 & 6 \\ -3 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \cdot (\lambda-2)(\lambda+1) \end{aligned}$$

から

$$\alpha = -1, 1, 2$$

であることが分かります。

$\alpha = -1$ のとき $-I_3 - A$ を行基本変形すると

$$-I_3 - A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 10 & -6 & -4 \\ 8 & -3 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$ のとき $I_3 - A$ を行基本変形すると

$$1 \cdot I_3 - A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ 10 & -4 & -4 \\ 8 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 2$ のとき $2I_3 - A$ を行基本変形すると

$$2I_3 - A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 10 & -3 & -4 \\ 8 & -3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) QID 1031 $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ -7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\Phi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda+5 & -2 & -2 \\ 5 & \lambda-3 & -1 \\ 7 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 5 & \lambda-3 & -1 \\ 7 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & \lambda-3 & -1 \\ 7 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 4 \\ 0 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2) \cdot \begin{vmatrix} \lambda-3 & 4 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \cdot (\lambda-1)(\lambda+1)\end{aligned}$$

から

$$\alpha = -1, 1, 2$$

であることが分かります. 次に固有ベクトルを求めます.

$\alpha = -1$ のとき $-I_3 - A$ を行基本変形すると

$$-1 \cdot I_3 - A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ 7 & -2 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$ のとき $1 \cdot I_3 - A$ を行基本変形すると

$$I_3 - A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 5 & -2 & -1 \\ 7 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 2$ のとき $2 \cdot I_3 - A$ を行基本変形すると

$$2 \cdot I_3 - A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$