L02_0612 練習問題

I 次の行列式の値を指定した列に関する余因子展開を用いて求めよ

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ (1列)　(2) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (2列)　(3) $\begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (3列)

II $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$,

$\vec{p} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -20 \\ -21 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -16 \\ -15 \end{pmatrix}$ とします。

(1) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d} \mid \vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})$ を狭義の階段行列にして, $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の定数倍として表現しましょう.

(2) (1)の行基本変形に続けて, 第4列, 第5列, 第6列が $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ になるように行基本変形しましょう. その結果を用いて $\vec{a}, \vec{p}, \vec{c}$ を $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ の定数倍として表わしましょう.

(3) $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q} + \zeta\vec{c}$ が成立するとします.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ となる $P \in M_3(\mathbb{R})$ を求めましょう.

また $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ となる $Q \in M_3(\mathbb{R})$ を求めましょう.

さらに $L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ であることを示しましょう.

III $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$

とします

(1) $(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})S$ を満たす $S \in M_2(\mathbb{R})$ を求めましょう.

$(\vec{a}\ \vec{b} \mid \vec{c}\ \vec{d})$ を被約の階段行列にして求めること.

(2) (1)を用いて $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, $\vec{c} \nparallel \vec{d}$ を示せ.

(3) $L := L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{p}, \vec{q})$ であることを示して, $\vec{v} \in L$ に対して

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}$$

のとき $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ で表わし, $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表わしましょう.

IV $\vec{a}, \vec{c} \in \mathbb{K}^3$ のとき.

$$|\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{c}| = 0$$

を示しましょう. (余因子展開を用いること)

V $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ とする.

$$|\vec{x}_i\ \vec{x}_j\ \vec{x}_k| = \varepsilon(i\ j\ k)\,|\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|$$

を満たす $\varepsilon(i\ j\ k)$ をすべての順列 $(i\ j\ k) \in S_3$ に対して求めましょう. そして

$(i\ j\ k)$ が奇 $\Rightarrow \varepsilon(i\ j\ k) = -1$

$(i\ j\ k)$ が偶 $\Rightarrow \varepsilon(i\ j\ k) = 1$

であることを示しましょう.

L02 06/19 練習問題解答

I QID 1112

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ （1 列） **(2)** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ （2 列） **(3)** $\begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ （3 列）

解答 (1)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} &= -3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot (-26) - (-3) \cdot (-41) + 2 \cdot (-12) \\ &= -69\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= -0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -0 \cdot 10 + 5 \cdot (-11) - 1 \cdot 24 \\ &= -79\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot (-1) - (-4) \cdot (-14) + 0 \cdot (-19) \\ &= -56\end{aligned}$$

補足問題（行の余因子展開）

(1) を 2 行の余因子展開，(2) を 1 行の余因子展開，(3) を 3 行の余因子展開を用いて値を求めましょう.

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ （2 行） **(2)** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ （1 行） **(3)** $\begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ （3 行）

解答 (1)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} &= -(-3) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-41) - (-3) \cdot 2 + 2 \cdot (-34) = -69\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot (-9) + (-2) \cdot 17 = -79\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{vmatrix}-4 & -1 & 0\\ -3 & 4 & -4\\ -2 & 3 & 0\end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 4 & -4\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}-4 & 0\\ -3 & -4\end{vmatrix}$$
$$= -2\cdot 4 - 3\cdot 16 = -56$$

II LA24L08QID 1114

(1) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}|\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})$ を狭義の階段行列に行基本変形して，$\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ の定数倍の和として表しましょう．
(2) (1) の行基本変形に続けて，第 4 列，第 5 列，第 6 列を $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ になるように行基本変形しましょう（第 1 列，第 2 列，第 3 列を忘れないように）．その結果を用いて $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ の定数倍の和として表しましょう．
(3) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\xi\vec{a}+\eta\vec{b}+\zeta\vec{c}$ が成立するとします．このとき $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$ を満たす $P\in M_3(\mathbf{R})$ を求めましょう．さらに $\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を $Q\in M_3(\mathbf{R})$ を求めましょう．最後に以上を用いて $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$ が成立することを示しましょう．

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\2\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\2\end{pmatrix},\quad \vec{p}=\begin{pmatrix}-6\\-1\\-5\\4\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\begin{pmatrix}-10\\-3\\-11\\0\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}-4\\-6\\-2\\12\end{pmatrix}$$

（解答）(1)
$1r \leftrightarrow 2r$

$$\begin{bmatrix}0 & -2 & 2 & -6 & -10 & -4\\ 1 & -2 & -2 & -1 & -3 & -6\\ 1 & -2 & 2 & -5 & -11 & -2\\ 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 12\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & -1 & -3 & -6\\ 0 & -2 & 2 & -6 & -10 & -4\\ 1 & -2 & 2 & -5 & -11 & -2\\ 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 12\end{bmatrix}$$

$3r+=1r*(-1)$,$4r+=1r*(-2)$

$$\to \begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & -1 & -3 & -6\\ 0 & -2 & 2 & -6 & -10 & -4\\ 0 & 0 & 4 & -4 & -8 & 4\\ 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 24\end{bmatrix}$$

$2r*=(-1/2)$

$$\to \begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & -1 & -3 & -6\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 4 & -4 & -8 & 4\\ 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 24\end{bmatrix}$$

$1r+=2r*(2)$,$3r+=2r*(0)$, $4r+=2r*(-6)$

$$\to \begin{bmatrix}1 & 0 & -4 & 5 & 7 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 4 & -4 & -8 & 4\\ 0 & 0 & 12 & -12 & -24 & 12\end{bmatrix}$$

$3r* = (1/4)$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -12 & -24 & 12 \end{bmatrix}$$

$1r+ = 3r*(4)$,$2r+ = 3r*(1)$, $4r+ = 3r*(-12)$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以上から
$\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{q} = -\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{r} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$,
が分かります.

(2)

$2r+ = 1r*(-2)$,$3r+ = 1r*(1)$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2r* = (1/5)$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$1r+ = 2r*(1)$,$3r+ = 1r*(3)$

$$\to \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2r* = (5/12)$

$$\to \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$1r+ = 3r*(-9/5)$,$2r+ = 3r*(1/5)$

$$\to \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以上から
$\vec{a} = \frac{3}{4}\vec{p} - \frac{5}{12}\vec{q} - \frac{1}{12}\vec{r}$, $\vec{b} = -\frac{1}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{q} + \frac{1}{4}\vec{r}$, $\vec{c} = -\frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{12}\vec{q} + \frac{5}{12}\vec{r}$,
が分かります.

(3) まず $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が LI であることに注意します。実際 (1) から

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$$

が導かれるからです．このことから

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

が成立します．さらに (1) から

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

が成立しますから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

が従います。以下 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とします.

次に $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ が LI であることに注意します。実際 (2) から

$$(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$$

が導かれるからです．このことから

$$(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix}$$

が成立します．さらに (2) から

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

が成立しますから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

が従います。以下では $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とします.

最後に $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$ を示しましょう．まず $\vec{v} \in L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$ とします．このとき

$$\vec{v} = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

となりますから $L(\vec{p},\vec{q},\vec{r}) \subset L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ であることが分かります．次に $\vec{v} \in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ とします．このとき

$$\vec{v} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$$

となりますから $L(\vec{p},\vec{q},\vec{r}) \supset L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ であることが分かります．以上で

$$L(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$$

であることが分かりました.

III LA24L09 0611 QID 1134

(1) $(\vec{a}\ \vec{b}\ |\vec{p}\ \vec{q})$ を狭義の階段行列に行基本変形して，正則な 2 次正方行列 $S \in M_2(\mathbf{R})$ を用いて

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})S$$

と表しましょう．
(2) $\vec{a} \nparallel \vec{b},\ \vec{p} \nparallel \vec{q}$ であることを示しましょう．
(3) (1) を用いて $L := L(\vec{p}, \vec{q}) = L(\vec{a}, \vec{b})$ であることを示しましょう．そして $\vec{v} \in L$ を

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}$$

と表すとき，$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ を $\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)$ で表し，逆に $\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)$ を $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ で表しましょう．

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

（解答） (1)

$$(\vec{a}\ \vec{b}|\vec{p}\ \vec{q}) \xrightarrow{1r\times=(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -1 & -5 \\ -1 & -3 & -1 & -5 \\ -1 & -4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r+=1r,3r+=1r,4r+=1r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{2r\times=(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r+=2r\times(-2),3r+=2r,4r+=2r\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と狭義の階段行列に行基本変形されます．これから

$$\vec{p} = -2\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

であることが分かります．ここで

$$S = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおくと $(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{a})S$ が成立します．さらに $\det(S) = \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$ から S は正則であることが分かります．
(2) (1) から行基本変形 $(\vec{a}\ \vec{b}) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2)$ が存在することが分かりますから $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ が従います．さらに

$$(\vec{p}\ \vec{q})\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

とすると

$$(\vec{a}\ \vec{b})S\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

となります．$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$S\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

と成りますが，S が正則なので $\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$ が従います．
注意 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbf{K}^n$ に対して $\vec{a} \nparallel \vec{b},\ \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \vec{d} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$ が成立するとき

$$\vec{c} \nparallel \vec{d} \Leftrightarrow \left|\begin{smallmatrix} x & x' \\ y & y' \end{smallmatrix}\right| \neq 0$$

が成立します（S1 で既習）．これを用いても構いません．
(3) (1) において $\vec{p}, \vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b}))$ であることが示されています．一般に $L(\vec{a}, \vec{b})$ が足し算と定数倍について閉じていることが分かっていますから

$$\xi\vec{p} + \eta\vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b})$$

が分かります．従って $L(\vec{p}, \vec{q}) \subset L(\vec{a}, \vec{b})$ が従います．次に $(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})S$ の両辺に S^{-1} を掛けると

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

から

$$\vec{a} = -\frac{1}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{q}, \quad \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$$

となり，$\vec{a}, \vec{b} \in L(\vec{p}, \vec{q})$ が従います．$L(\vec{a}, \vec{b})$ と同様に $L(\vec{p}, \vec{q})$ も足し算と定数倍について閉じていますから

$$x\vec{a} + y\vec{b} \in L(\vec{p}, \vec{q})$$

が従います．よって $L(\vec{a}, \vec{b}) \subset L(\vec{p}, \vec{q})$ が示されました．以上で $L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{p}, \vec{q})$ が示されました．さらに $\vec{v} \in L := L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{p}, \vec{q})$ が

$$\vec{v} = (\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = (\vec{p}\ \vec{q})\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)$$

とすると $(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})S$ から

$$(\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = (\vec{a}\ \vec{b})S\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)$$

となりますが $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$(\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = (\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$$

であることが従います．これを用いると

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = S\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)$$

が従います．この等式の両辺に S^{-1} を掛けると

$$\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = S^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

も従います．

IV $\quad |\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\underset{\uparrow}{=} \quad a_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} c_1 & c_1 \\ c_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

1列の展開

$$= a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 0$$

V $\quad (1\ 2\ 3)$

$|\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3| = |\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|$ から $\varepsilon(1\ 2\ 3) = 1$

$(1\ 3\ 2)$

$|\vec{x}_1\ \vec{x}_3\ \vec{x}_2| = -|\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|$ から $\varepsilon(1\ 3\ 2) = -1$

$(2\ 1\ 3)$

$|\vec{x}_2\ \vec{x}_1\ \vec{x}_3| = -|\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|$ から $\varepsilon(2\ 1\ 3) = -1$

$(2\ 3\ 1)$

$|\vec{x}_2\ \vec{x}_3\ \vec{x}_1| = -|\vec{x}_1\ \vec{x}_3\ \vec{x}_2| = |\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|$ から

$\varepsilon(2\ 3\ 1) = 1$

$(3\ 1\ 2)$

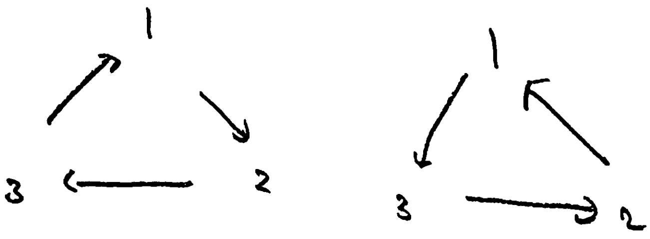
$|\vec{x}_3\ \vec{x}_1\ \vec{x}_2| = -|\vec{x}_1\ \vec{x}_3\ \vec{x}_2| = |\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|$ から

$\varepsilon(3\ 1\ 2) = 1$

$(3\ 2\ 1)$

$|\vec{x}_3\ \vec{x}_2\ \vec{x}_1| = -|\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|$ から $\varepsilon(3\ 2\ 1) = -1$

$+$の符号 $\qquad -$の符号



左のルールに合致することを確認しよう。(整合性を確認)