教科書から



(3) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ (4) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

**演習 9.10.** $\mathbf{R}^4$ の部分空間

$$V=\{{}^t(x\ y\ z\ w)\in\mathbf{R}^4;\ x+y+z-w=0\}$$

の正規直交基底を求めましょう.

## 9.2 直交行列—2 次元の場合

### 9.2.1 回転行列

2 次正方行列

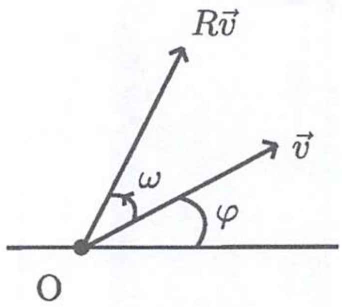
$$R=\begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega\\ \sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}$$

を考えましょう. この行列は幾何的に大事な性質を持っています. そのことを理解するために 2 次元ベクトル $\vec{v}(\neq\vec{0})\in\mathbf{R}^2$ を $r>0$ を用いて

$$\vec{v}=r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

と表示して $R$ を掛けます.

$$\begin{aligned}R\vec{v}&=\begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega\\ \sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}\cdot r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\\ &=r\begin{pmatrix}\cos\omega\cos\varphi-\sin\omega\sin\varphi\\ \sin\omega\cos\varphi+\cos\omega\sin\varphi\end{pmatrix}\\ &=r\begin{pmatrix}\cos(\omega+\varphi)\\ \sin(\omega+\varphi)\end{pmatrix}\end{aligned}$$




から $R\vec{v}$ は $\vec{v}$ を角度 $\omega$ 回転したベクトルとなることが分かります. このことから $R$ を**回転行列**と呼びます.

回転行列の性質をいくつか紹介しましょう.

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad R_{\theta'}=\begin{pmatrix}\cos\theta' & -\sin\theta'\\ \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix}$$

と定めると

$$
\begin{aligned}
R_\theta R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}
\end{aligned}
$$

から

$$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} \tag{9.28}$$

を得ます（この式は回転行列の幾何的な意味を考えると自然なものです）．**回転行列の積も回転行列になる**ことに注意しましょう．さらに (9.28) から

$$R_{-\theta}R_\theta = R_\theta R_{-\theta} = R_0 = I_2$$

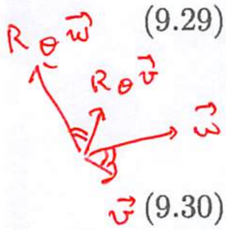
$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$

が従いますが、これから**回転行列は正則で逆行列も回転行列になる**ことが分かります．

$$
\begin{aligned}
(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= {}^t\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = {}^tR
\end{aligned}
$$

から

$${}^tRR = R\,{}^tR = I_2 \tag{9.29}$$




が従います．

回転行列 $R$ と任意のベクトル $\vec{v},\ \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \tag{9.30}$$

が成立します．これは $\vec{v}$ と $\vec{w}$ のなす角度を $\phi$ とするとき，内積が

$$(\vec{v}, \vec{w}) = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cos\phi$$

と表されることから分かります．実際，回転してもベクトルの大きさと 2 本のベクトルのなす角度は変わりません．あるいは，この (9.30) を

転置

$$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, {}^tRR\vec{w}) = (\vec{v}, I_2\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$$

と (9.29) を用いて示すこともできます．ここで 47 ページの (3.25) を用いました．

**演習 9.11.** 次の計算をしましょう．*(1)* $R_{\frac{\pi}{2}}\binom{a}{b}$　*(2)* $R_{-\frac{\pi}{2}}\binom{a}{b}$

一般に 実行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対して $(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$
$(\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{w} \in \mathbb{R}^m)$

### 9.2.2 直交行列

回転行列 $R$ は任意の $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \tag{9.31}$$

を満たします．逆に，2 次正方行列 $P$ が任意の $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \tag{9.32}$$

を満たしているとします．このとき $P$ はどのような行列になるかについて考えていきます．(3.25) を用いると $(P\vec{v}, P\vec{w}) = ({}^tPP\vec{v}, \vec{w})$ が成立しますから (9.32) は

$$({}^tPP\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad \text{すなわち} \quad (({}^tPP - I_2)\vec{v}, \vec{w}) = 0 \tag{9.33}$$

と同値です．ここで $\vec{a} \in \mathbf{R}^2$ に対して

→ 一般的に

$$(\vec{a}, \vec{w}) = 0 \quad (\vec{w} \in \mathbf{R}^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \tag{9.34}$$

が成立するので（演習 2.2），任意の $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して (9.33) が成立することは

$$({}^tPP - I_2)\vec{v} = 0 \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^2)$$

と同値であることが分ります．さらに，2 次正方行列 $C \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

→ 一般的に

$$C\vec{v} = \vec{0} \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^2) \quad \Longleftrightarrow \quad C = O_2 \tag{9.35}$$

が成立しますから（演習 3.14），任意の $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して (9.32) が成立することは

$${}^tPP = I_2 \tag{9.36}$$

と同値であることが証明できました．

さらに，(9.36) が成立するとき，

$$1 = \det(I_2) = \det({}^tPP) = \det({}^tP)\det(P) = \det(P)^2$$

から

$$\det(P) = \pm 1 \tag{9.37}$$

が従います．よって，$P$ は正則で，

$${}^tP = P^{-1} \quad \text{さらに} \quad P\,{}^tP = PP^{-1} = I_2$$

(iii) ${}^tPP = P\,{}^tP = I_2 \Longleftrightarrow$ (i) $(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$ $(\forall\vec{v}, \forall\vec{w} \in \mathbb{R}^2)$

が分ります．以上から

$$ {}^tPP = I_2 \Leftrightarrow {}^tPP = P{}^tP = I_2 $$

が示されました．

**定理 9.10.** 実 2 次正方行列 $P \in M_2(\mathbf{R})$ に対して次の条件 *(i), (ii), (iii), (vi)* は同値です（この条件を満たす実 2 次正方行列を ***2* 次の直交行列**といいます）.
*(i)* $(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$
*(ii)* $||P\vec{v}|| = ||\vec{v}|| \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^2)$
*(iii)* ${}^tPP = P{}^tP = I_2$
*(iv)* $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と列ベクトル表示をすると $||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$

*Proof.* (i)⇒(ii) は (i) において $\vec{v} = \vec{w}$ とすれば従います．
(ii)⇒(i) は，一般に $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$ ||\vec{v} + \vec{w}||^2 - ||\vec{v} - \vec{w}||^2 = 4(\vec{v}, \vec{w}) $$

が成立することを用いれば証明できます． 問

(i) ⇔(iii) は上で証明しました．
最後に (iii) ⇔(iv) を証明しましょう．$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ とすると

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \end{pmatrix} (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1\vec{p}_1 & {}^t\vec{p}_1\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_2\vec{p}_1 & {}^t\vec{p}_2\vec{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||\vec{p}_1||^2 & (\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ (\vec{p}_2, \vec{p}_1) & ||\vec{p}_2||^2 \end{pmatrix} $$

から

$$ {}^tPP = I_2 \Leftrightarrow ||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1, \ (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0 $$

が分かります．これから (iii)⇔(iv) が従います．

□

**演習 9.12.** (9.34) と (9.35) を証明してください．

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して
$||\vec{a} \pm \vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 \pm 2(\vec{a}, \vec{b}) + ||\vec{b}||^2$

問

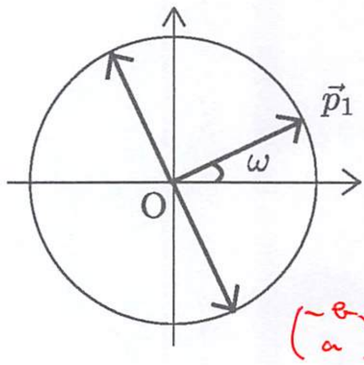
ヒント

$||\vec{a} \pm \vec{b}||^2 = (\vec{a} \pm \vec{b}, \vec{a} \pm \vec{b})$
$= \cdots$
展開．

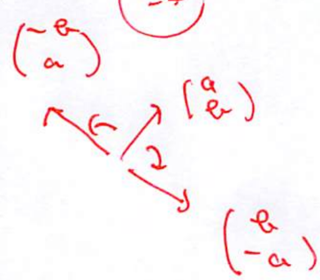
次に上の条件 (iv) を用いて，直交行列はどのような行列か考えてみましょう．$||\vec{p_1}|| = 1$ ですから，

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} \cos\omega \\ \sin\omega \end{pmatrix}$$

と表示できます．すると，$||\vec{p_2}|| = 1$，$(\vec{p_1}, \vec{p_2}) = 0$ ですから，$\vec{p_2}$ は $\vec{p_1}$ を $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転したものになります．このことから




注




$$\vec{p_2} = \begin{pmatrix} \cos(\omega \pm \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\omega \pm \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\sin\omega \\ \cos\omega \end{pmatrix}$$

と表示できます．以上で，2 次の直交行列 $P$ は

$$P = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\theta & -\cos\omega \end{pmatrix}$$

と表示できることが分かりました．さらに，それぞれの行列の幾何学的な意味を考えましょう．

**(i)** 最初に

$$P = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

の場合を考えましょう．これは 9.2.1 節で考えた回転行列に他なりません．

**(ii)**　次に

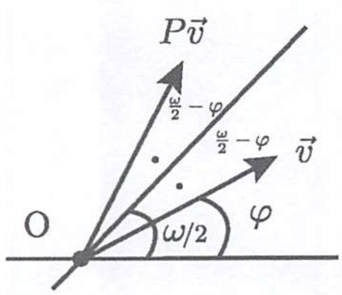
$$P = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}$$

$y = (\tan\frac{\omega}{2})x$ に関する折り返し

の場合を考えましょう．そのための $r > 0$ として

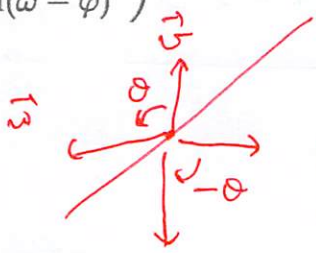
$$\vec{v} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

に対して $P$ を掛けます．




$$\begin{aligned} P\vec{v} &= \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix} \cdot r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} \cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi \\ \sin\omega\cos\varphi - \cos\omega\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} \cos(\omega - \varphi) \\ \sin(\omega - \varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$ も明らか




$\boxed{\cos(-\theta) = \cos\theta}$ に注意．

このとき $P\vec{v}$ は方向ベクトルが $\begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2} \\ \sin\frac{\omega}{2} \end{pmatrix}$ である原点を通る直線に関して $\vec{v}$ を**折り返し**たものであることが分ります．

**注意 9.1.** $P$ が直交行列とします．237ページの (9.37) で示しましたが $\det(P) = \pm 1$ が成立します．
*(i)* <u>$P$ が回転の場合</u> $\det(P) = 1$　　*(ii)* <u>$P$ が折り返しの場合</u> $\det(P) = -1$
となります．

**演習 9.13.** $P_1$，$P_2$ が直交行列とします．$P_1P_2$ が直交行列であることを示しましょう．${}^tP_1 = P_1^{-1}$ も直交行列であることを示しましょう．

問 注 →

**演習 9.14.** $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ に対して $Q^2$ を考えて $Q^{-1}$ を求めましょう．

**演習 9.15.** $\vec{p} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ を考えます．$\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ の $\vec{p}$ 方向への直交射影を

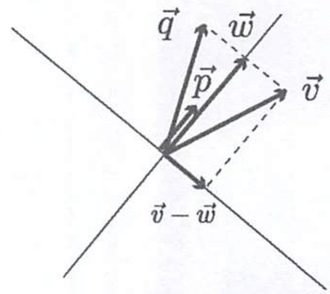
$$\vec{w} = (\vec{p}, \vec{v}) \cdot \vec{p}$$

と定めます．このとき

$$\vec{q} = \vec{v} - 2(\vec{v} - \vec{w}) = 2\vec{w} - \vec{v}$$

に対して

$$\vec{q} = Q\vec{v}$$




と $Q \in M_2(\mathbf{R})$ を用いて表されることを示しましょう．そして $Q$ を求めましょう．

# 9.3　直交行列—一般の場合

## 9.3.1　定義と一般的な性質

$n$ 次正方行列 $P \in M_n(\mathbf{R})$ が

$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^n)$$

問　$SO(2) = \{P \in O(2) ; |P| = 1\}$ を回転行列とすると
$SO(2)$ は かけ算と 逆について 閉じていることを示せ．

L04_0626の小テスト解答から.

直交行列　$P \in M_3(\mathbb{R})$ が $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ とするとき、 ③

$\|P\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$

$(\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3)$

$\Updownarrow$ ※

$${}^tPP = I_3 \iff (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\iff (P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3)$$

が成立します。(問 とします。) このとき $P$ を 3次 直交行列と呼びます。3次 直交行列の全体を $O(3)$ と記します。

← 2次直交行列と同様.

$|{}^tPP| = |I_3|$ より $|P|^2 = 1$ 従って $|P| = \pm 1$

$$SO(3) = \{P \in O(3);\ |P| = 1\}$$

を3次の回転群と呼びます。$SO(3)$ の分類は A で行ないます。

→ 例は?

セメスター

(教科書にある)

問　$O(3)$ が逆行列、かけ算について閉じていることを示しましょう

問　$SO(3)$ についても同様。

(※について)

問　$\|P\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$ $(\forall \vec{v} \in V)$ ならば $P$ は直交であることを示せ.