

解答

I (1) $z_1, z_2 \neq 0$ とし、 $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2}$ ならば $z_2 = z_1$ とわかる。

f は単射であることがわかる。

(2) $w \in \mathbb{C}$ に対し $\exists z \neq 0$ が存在し、 $w = \frac{1}{z}$ が成立する

とわかる。なぜなら $w \neq 0$ が成り立つから、

$$f(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

逆に $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し $w \neq 0$ とわかる。なぜなら $z = \frac{1}{w}$ とおくと

$$f(z) = \frac{1}{1/w} = w \quad \text{とわかる。} \quad w \in f(\mathbb{C} \setminus \{0\}). \quad \text{従って}$$

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset f(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

より

$$f(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

(3) $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が全単射とわかる。

$w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とおくと $w = \frac{1}{z}$ となる $z = \frac{1}{w}$ があり、

$$\begin{aligned} f^{-1}: \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ w &\longmapsto \frac{1}{w} \end{aligned}$$

であることがわかる。

(2)

II (1) $z \neq 1$ とし, $\frac{z+1}{z-1} = \frac{z-1+2}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}$ として
 注意する.

$$z_1, z_2 \neq 1 \text{ とし } \frac{z_1+1}{z_1-1} = \frac{z_2+1}{z_2-1} \text{ とすると}$$

$$1 + \frac{2}{z_1-1} = 1 + \frac{2}{z_2-1} \text{ から } z_2-1 = z_1-1 \text{ 従って } z_1 = z_2$$

となり得る. よって f は単射であることが分かる.

$$(2) \quad z \neq 1 \text{ として } w = \frac{z+1}{z-1} \text{ とすると } w = 1 + \frac{2}{z-1} \text{ から}$$

$$w-1 = \frac{2}{z-1} \neq 0$$

従って $w \neq 1$ であることが分かる. よって

$$f(\mathbb{C} \setminus \{1\}) \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

であることが分かる. 逆に $w \neq 1$ とすると

$$z = 1 + \frac{2}{w-1} = \frac{w+1}{w-1} \text{ とすると } z-1 = \frac{2}{w-1} \text{ 従って } z \neq 1$$

$$\text{よって } w = 1 + \frac{2}{z-1} = \frac{z+1}{z-1} = f(z) \text{ となる.}$$

$$\mathbb{C} \setminus \{1\} \subset f(\mathbb{C} \setminus \{1\})$$

よって

$$f(\mathbb{C} \setminus \{1\}) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

(3) $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$ は全単射となる.

$$w \neq 1 \text{ から } w = \frac{z+1}{z-1} \text{ と } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \text{ として } z \text{ を求めるとき}$$

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

となり得る. よって

$$f^{-1}: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

が存在する.

$$w \mapsto \frac{w+1}{w-1}$$

補足 (1次元変換) $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ かつ

$$|A| := ad - bc \neq 0$$

$z \neq \frac{c}{d}$ とき, $A \in GL_2(\mathbb{C})$ として z を変換 $z \mapsto f_A(z)$ とし,

$$f_A(z) = \frac{az + c}{cz + d}$$

$z \mapsto f_A(z)$ を 1次元変換 と呼ぶ.

$$c \neq 0 \text{ かつ } a \neq 0$$

$$f_A: \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \quad (\text{全単射})$$

$$c = 0 \text{ かつ } a \neq 0 \text{ (} ad \neq 0 \text{ かつ } d \neq 0 \text{ かつ } z \neq -\frac{d}{c} \text{ は注意)}$$

$$f_A: \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \quad (\text{全単射})$$

と示す.

(17) 全単射であることを示す.

1次元変換の合成と行列の積には関係が成り立つ.

$$A, B \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ かつ } AB \in GL_2(\mathbb{C})$$

が成り立つことは MSF 2" 3" に示す. あるいは

$$f_A \circ f_B = f_{AB}$$

が成り立つ. あるいは 1次元変換 $z \mapsto f_A(z)$ と $z \mapsto f_B(z)$ の自然な式

と成り立つことは $z \mapsto f_A(f_B(z))$ と $z \mapsto f_{AB}(z)$ と示す.

問 I a

④

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$$\text{よ } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問 2 a

$$g(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

$$\text{よ } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ が正則である。}$$

$g(z) = 1 + \frac{2}{z-1}$ と変形して「 z 」か「 $1/z$ 」と変換する種類の
1変換の合成として書ける(一般に成立する)

$$(i) g_1(z) = \frac{1}{z} (z \neq 0)$$

$$(ii) (\text{平行移動}) g_2(z) = z + \alpha (\alpha \in \mathbb{C})$$

$$(iii) (\text{非ゼロの定数倍}) g_3(z) = \beta \cdot z (\beta \neq 0)$$

$$g_1: \mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$g_2: \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

$$g_3: \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

これら単射の逆写像は注意して、 $z \neq 0$ 。

$$g_2(z) = z - 1, g_3(z) = 2z, g_4(z) = z + 1$$

$$g = g_4 \circ g_3 \circ g_1 \circ g_2$$

これらの単射の
合成で g が作れる

と示す。正確には

$$\mathbb{C} \setminus \{1\} \xrightarrow{g_2} \mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{g_1} \mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{g_3} \mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{g_4} \mathbb{C} \setminus \{0\}$$