

写像の演習問題 (2025 年度版)

以下では写像 $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ で、例えば

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5, f(5) = 1$$

である場合

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

と表すことにします.

I $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ に対して

(1) f, g が単射であるか, 全射であるか判定しましょう.

(2) $f \circ g, g \circ f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ を求めましょう.

(3) f の像 $f(\{1, 2, 3, 4, 5\})$, g の像 $g(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ を求めましょう.

II 写像 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \ x \mapsto 2x + 1$ と $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \ y \mapsto y^2 - 1$ に対して, 合成 $f \circ g, g \circ f$ を求めましょう.

III 2つの写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ が全単射であるとします. 合成 $g \circ f$ が全単射であることを示して, その逆写像が

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

であることを示しましょう.

IV 写像 $f: \mathbf{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{1\} \ x \mapsto \frac{x-1}{x-3}$ が定義できることを示して, f が全単射であることを示しましょう. 最後に逆写像 f^{-1} を求めましょう.

V $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ を

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

と定義します. f は全単射であることに注意します. 逆写像 f^{-1} を求めましょう.

VI 全単射である $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ をすべて求めましょう.

写像の演習問題（補足）（2025 年度版）

I (1) 写像 $f: \mathbf{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{C} \quad z \mapsto \frac{1}{z}$ が単射であることを示しましょう.

(2) $f(\mathbf{C} \setminus \{0\})$ を求めましょう.

(3) $f: \mathbf{C} \setminus \{0\} \rightarrow f(\mathbf{C} \setminus \{0\}) \quad z \mapsto \frac{1}{z}$ は全単射となりますが（解答にある注意参照）, 逆写像

$$f^{-1}: f(\mathbf{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\}$$

を求めましょう.

II (1) 写像 $g: \mathbf{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{C} \quad z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$ が単射であることを示しましょう.

(2) $g(\mathbf{C} \setminus \{1\})$ を求めましょう.

(3) $g: \mathbf{C} \setminus \{1\} \rightarrow g(\mathbf{C} \setminus \{1\}) \quad z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$ は全単射となりますが（解答にある注意参照）, 逆写像

$$g^{-1}: g(\mathbf{C} \setminus \{1\}) \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{1\}$$

を求めましょう.

解答

I (1) f について $f(1) = f(3) = 3$ なので f は単射ではない. また $f(i) = 4$ である $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ が存在しないので, f は全射ではない.

g について $g(2) = g(3) = 1$ なので g は単射ではない. $g(i) = 5$ である $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ が存在しないので, g は全射ではない.

(2)

$$\left. \begin{array}{lcl} f \circ g(1) & = & f(4) = 1 \\ f \circ g(2) & = & f(1) = 3 \\ f \circ g(3) & = & f(1) = 3 \\ f \circ g(4) & = & f(2) = 5 \\ f \circ g(5) & = & f(3) = 3 \end{array} \right\} \text{なので } f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{lcl} g \circ f(1) & = & g(3) = 1 \\ g \circ f(2) & = & g(5) = 3 \\ g \circ f(3) & = & g(3) = 1 \\ g \circ f(4) & = & g(1) = 4 \\ g \circ f(5) & = & g(2) = 1 \end{array} \right\} \text{なので } g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$f(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{1, 2, 3, 5\}, \quad g(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{1, 2, 3, 4\}$$

注意 (i) 有限集合 X と写像 $f: X \rightarrow X$ に対して

$$f \text{ が単射} \Leftrightarrow f \text{ が全射}$$

が成立します (証明してみましょう).

(ii) (3) から f, g が全射でないことが従います. 一般に写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して

$$f \text{ が全射} \Leftrightarrow f(X) = Y$$

が成立します.

II

$$f \circ g(x) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$$

$$g \circ f(x) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 3$$

III 一般に 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ に対して

(a) f, g が全射 $\Rightarrow g \circ f$ は全射

(b) f, g が単射 $\Rightarrow g \circ f$ は単射

が成立します. まず (a) を示します. g が全射なので $\forall z \in Z$ に対して $\exists y \in Y$ が存在して

$$z = g(y)$$

が成立します。他方 f が全射なので、 $\forall y \in Y$ に対して $\exists x \in X$ が存在して

$$y = f(x)$$

が成立します。このとき

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

が従います。以上で $g \circ f$ が全射であることが示されました。

次に (b) を示します。 $x, x' \in X$ に対して $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ すなわち $g(f(x)) = g(f(x'))$ が成立するとします。 f が単射なので $f(x) = f(x')$ が従います。さらに f が単射なので $x = x'$ が従います。以上で $g \circ f$ が単射であることが示されました。

f と g が全単射のとき f と g が全射で、(a) によって $g \circ f$ は全射であることが分かります。また f と g が単射であることから、(b) によって $g \circ f$ は単射であることが分かります。以上で (a) によって $g \circ f$ は全単射であることが示されました。

さらに

$$g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ id_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_Z$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ id_Y \circ f = f^{-1} \circ f = id_X$$

となりますから、 $f^{-1} \circ g^{-1}$ は $g \circ f$ の逆写像で、逆写像の一意性から

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

であることが分かります。

IV (定義可能であること) $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$ のとき $x \neq 3$ なので $\frac{x-1}{x-3}$ が定義できます。値域に関しては $\frac{x-1}{x-3} = 1$ ならば $x-1 = x-3$ すなわち $-1 = -3$ となりますから、 $\frac{x-1}{x-3} = 1$ を満たす $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$ は存在しないことが分かります。以上で

$$f: \mathbf{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{1\}$$

が定義できることが分かります。(well-defined と言います。)

(f の全射性) $y \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ すなわち $y \neq 1$ とします。

$$\begin{aligned} y = \frac{x-1}{x-3} \text{ かつ } x \neq 3 &\Leftrightarrow (x-3)y = x-1 \text{ かつ } x \neq 3 \\ &\Leftrightarrow xy - 3y = x-1 \text{ かつ } x \neq 3 \\ &\Leftrightarrow x(y-1) = 3y-1 \text{ かつ } x \neq 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3y-1}{y-1} \text{ かつ } x \neq 3 \end{aligned}$$

に注意します (最後のところで $y \neq 1$ である前提を用いています)。 $x = \frac{y-3}{y-1}$ と定めると

$$x = \frac{3(y-1)+2}{y-1} = 3 + \frac{2}{y-1}$$

なので $x \neq 3$ であることが分かりますから、 $f(x) = y$ であることが分かります。

(f の単射性) $x, x' \neq 3$ が $\frac{x-1}{x-3} = \frac{x'-1}{x'-3} \cdots (*)$ を満たすとします. このとき上で使った計算から

$$(*) \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x-3} = 1 + \frac{2}{x'-3} \Leftrightarrow \frac{2}{x-3} = \frac{2}{x'-3} \Leftrightarrow x'-3 = x-3 \Leftrightarrow x = x'$$

から f の単射性が従います. (ここで途中 $x, x' \neq 3$ を用いて同値性を導いています.)

V

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

VI

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

注意 この並べ方を辞書式順序と呼びます.

写像

$$f:]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x+1$$

について考える.

$$f(x) = 2x+1 \quad (x \in]0, 1[$$

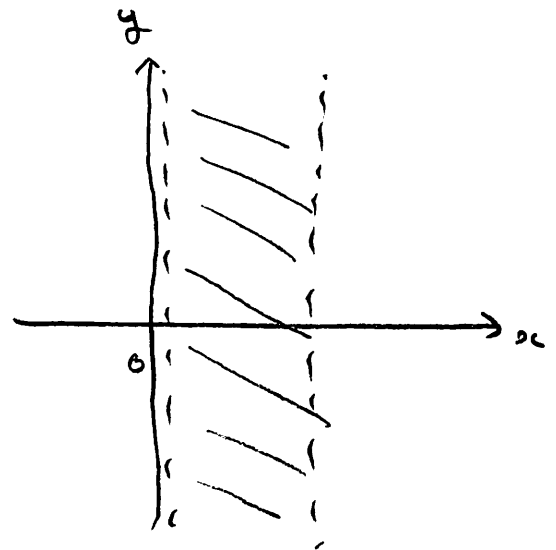
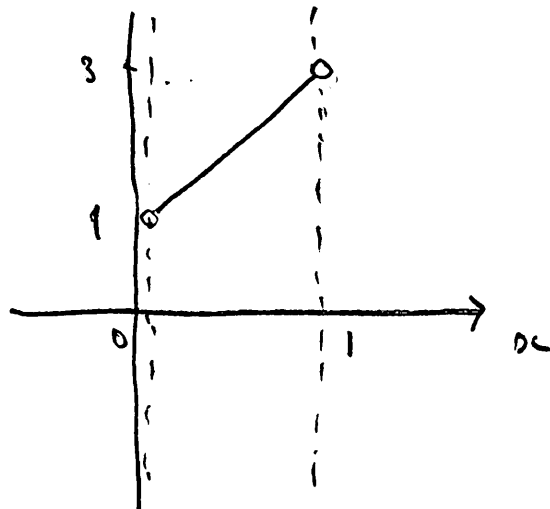
とも表現する. ぐらうは $]0, 1[\times \mathbb{R}$ 中にあるか

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x, y)$$

と考える $\mathbb{R}^2$ 中にあると考えるより.

このときぐらうは下の図にある.



次に f の像について考える. $0 < x < 1$ とする

$$1 < 2x+1 < 3$$

から

$$f(]0, 1[) \subset]1, 3[$$

が成り立つ.

$$y \in]1, 3[\text{ に対して } x = \frac{y-1}{2} \text{ とすると}$$

②

$$1 < y < 3 \text{ かつ } \frac{1}{2} < \frac{y}{2} < \frac{3}{2} \text{ かつ } 0 < \frac{y-1}{2} < 1 \text{ かつ}$$

$$x = \frac{y-1}{2} \in]0, 1[\text{ かつ } x \text{ の定義域は } x \in]0, 1[$$

$$f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{y-1}{2} + 1 = y - 1 + 1 = y$$

$$\text{よって、従って }]1, 3[\subset f(]0, 1[) \text{ となる。}$$

よって

$$f(]0, 1[) =]1, 3[$$

となる。

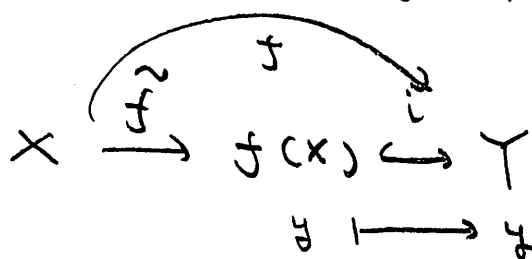
$$\text{--- 例 ---} \quad f: X \rightarrow Y \text{ かつ } f(x) = 2x$$

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$$

つまり、従って $x \in X$ ならば $f(x) \in f(X)$ となる。
写像

$$\tilde{f}: X \rightarrow f(X)$$

が定義できる。 $\sim$ は f の制限 (f の制限)



と考える。

$$f = i \circ \tilde{f}$$

つまり $f = i \circ \tilde{f}$ かつ $\tilde{f}$ は f の制限である。

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

は全射である。4. $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ は全射である。

(注) 一般に $f: X \rightarrow Y$ が全射 $\Leftrightarrow f(X) = Y$

例

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

は単射である。実際、 $x, x' \in [0, 1]$ とし

$$f(x) = f(x')$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = 2x'+1 \quad \text{から} \quad x = x' \quad \text{となる。}$$

f は単射である。

$$\begin{aligned} \therefore f \text{ から 従う } \quad \tilde{f}: [0, 1] &\longrightarrow [1, 3] \\ x &\longmapsto 2x+1 \end{aligned}$$

に $\tilde{f}$ は全射である。一般論から全射である $\Leftrightarrow \tilde{f}$ は単射である。 $\tilde{f}$ の逆写像を求めよう。

($\Leftarrow$ の 2. を示す。 $[f: X \rightarrow Y \text{ は逆写像をもつ} \Leftrightarrow f: \text{全単射}]$ から成り立つ。))

$$\begin{aligned} g: [1, 3] &\longrightarrow [0, 1] \\ y &\longmapsto \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{と } g \text{ は } f \text{ の逆写像である。 } 1 < y < 3 \text{ ならば } 0 < \frac{y-1}{2} < 1$$

(4)

従って g は正しく定義されている。(well-defined)

$$\tilde{f} \circ g(y) = 2 \frac{y-1}{2} + 1 = y - 1 + 1 = y \quad (y \in]1, 3[)$$

$$g \circ \tilde{f}(x) = \frac{2x+1-1}{2} = \frac{2x}{2} = x \quad (x \in]0, 1[)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & \left. \begin{aligned} \tilde{f} \circ g &= \text{id}_{]1, 3[} \\ g \circ \tilde{f} &= \text{id}_{]0, 1[} \end{aligned} \right\} \tilde{f} \text{ の逆} \quad g = \tilde{f}^{-1} \end{aligned}$$