第2章　複素数と代数学の基本定理

以下では $\mathbf{K}$ で $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ を表します．また $\mathbf{K}[x]$ は $\mathbf{K}$ を係数とする多項式全体の集合を表します.

2.1　複素数

2.1.1　共役複素数

$z = x + iy \in \mathbf{C}$ $(x, y \in \mathbf{R})$ に対して

$$\bar{z} = x - iy$$

を z の**共役複素数**と呼びます.

$z_1, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ に対して以下が成立します.

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

3. $z \neq 0$ のとき $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$

4. $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

演習 2.1. 上の *1,2,3,4* を示しましょう.

$z = a + ib$ $(x, y \in \mathbf{R})$ とします．このとき $\bar{z} = x - iy$ から

5. $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

6. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ なので $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

演習 2.2. 以下の定理を証明しましょう.

定理 2.1. $a_0, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$ として

$$f(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

を考えます．$\alpha \in \mathbf{C}$ に対して

$$f(\alpha) = 0 \ \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0$$

が成立します.

2.1.2　複素数の極形式

$z = z + iy \in \mathbf{C}$ $(x, y \in \mathbf{R})$ が $z \neq 0$ を満たすとします．このとき

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

と変形します．

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1$$

なのである $\theta \in \mathbf{R}$ に対して

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$$

が成立します．このとき $r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表すことができます．これを $z \neq 0$ の**極形式**と呼びます．

次に $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ が $z, z_1, z_2 \neq 0$ を満たすとします．このとき

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

と極形式で表すと

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \tag{2.2}$$

が成立します．

演習 2.3. (2.1), (2.2) を示しましょう．

例えば $z = 1 + i$ は

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

と表されて，

$$z^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$$

が成立します．より一般には $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0)$ に対して

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad (n \in \mathbf{Z}) \tag{2.3}$$

が成立します．

演習 2.4. (2.3) を示しましょう．

2.2　多項式

2.2.3　多項式の次数

1. $P(x) \in \mathbf{K}[x]$ が $P(x) \neq 0$ であるとします.

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbf{K}(j = 0, \cdots, n), a_n \neq 0 \tag{2.4}$$

とします．このとき P の次数として

$$\deg(P) = n$$

と定めます.
2. $P(x) \in \mathbf{K}[x]$ が $P(x) = 0$ であるとします．このとき

$$\deg(P) = -\infty$$

と定めます.
3. $P, Q \in \mathbf{K}[x]$ のとき

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

が成立します．これは P が (2.4)

$$Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0,\ b_k \in \mathbf{K}(k = 0, \cdots, m), b_m \neq 0 \tag{2.5}$$

で与えられているとき

$$(P \cdot Q)(x) = a_n b_m x^{m+n} + \cdots + c_\ell x^\ell + \cdots + c_1 x + c_0$$

$$c_\ell = \sum_{i+j=\ell} a_i b_j$$

となることから示せます.
4. **（剰余定理）**

定理 2.2. $P, D \in \mathbf{K}[x]$ で $\deg(D) \geq 1$ とします．このとき

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

$$\deg(R(x)) < \deg(D(x))$$

を満たす $Q(x), R(x) \in \mathbf{K}[x]$ がただ一つ存在します.

Proof. **（存在）**　**(i)** $\deg(P) < \deg(D)$ の場合

$$P(x) = 0 \cdot D(x) + P(x),\ \deg(P(x)) < \deg(D(x))$$

となりますから，$Q(x) = 0$, $R(x) = P(x)$ として成立します．
(ii) $n = \deg(P) \geq \deg(D) = m$ の場合を考えます．帰納法を用いるとして，$\deg(P) \leq n-1$ の場合は定理（存在について）が示されているとします．

$$D(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0,\ b_k \in \mathbf{K}(k = 0, \cdots, m), b_m \neq 0$$

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbf{K}(j = 0, \cdots, n), a_n \neq 0$$

とします．ここで

$$S(x) := P(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} D(x)$$

とすると

$$\deg(S(x)) \leq n-1$$

となります．帰納法の仮定を用いると

$$S(x) = Q_1(x)D(x) + R(x), \quad \deg(R(x)) < \deg(D(x))$$

を満たす Q_1, $R \in \mathbf{K}[x]$ が存在します．このとき

$$P(x) = (a_n b_m x^{n-m} + Q_1(x))D(x) + R(x)$$

より

$$Q(x) = a_n b_m x^{n-m} + Q_1(x)$$

として定理（存在について）が成立することが分かります．
（一意性）

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x) = Q_0(x)D(x) + R_0(x)$$

$$\deg(R(x)) < \deg(D(x)),\ \deg(R_0(x)) < \deg(D_0(x))$$

が成立するとします．このとき

$$(Q(x) - Q_0(x))D(x) = R_0(x) - R(x)$$

が成立しますが，$R \neq R_0$ とすると $Q(x) - Q_0(x) \neq 0$ が従います[1]．このことから

$$\deg(D) > \deg(R_0 - R_1) = \deg(Q - Q_0) + \deg(D) \geq \deg(D)$$

から矛盾が生じます．よって $R = R_0$ が導かれます．さらに $D \neq 0$ から $Q = Q_0$ も従います．　□

定理 2.2（剰余定理）を用いると次の定理 2.3（因数定理）を証明できます．

定理 2.3.（因数定理） $P(x) \in \mathbf{K}[x]$, $\alpha \in \mathbf{K}$ のとき

$$P(\alpha) = 0 \ \Leftrightarrow \ x - \alpha \text{は} P(x) \text{を割切ります}$$

[1] $P_1, P_2 \in \mathbf{K}[x]$ において $P_1 P_2 = 0$ ならば $P_1 = 0$ または $P_2 = 0$ となることを用いています．

Proof. （$\Rightarrow$ ）$P(x)$ を $x-\alpha$ で割ります．すなわち

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + \beta$$

を満たす $Q(x) \in \mathbf{K}[x]$, $\beta \in \mathbf{K}$ が存在します．この両辺に $x=\alpha$ を代入すると

$$0 = P(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) + \beta = \beta$$

から $\beta = 0$ が分かりますから，$P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ が導けます.
($\Leftarrow$ ）これは明らかでしょう. □

定理 2.3（因数定理）の応用として次の定理 2.4 を証明します.

定理 2.4. $P(x) \in \mathbf{K}[x]$ が n 次以下とします．そして $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbf{K}$ が条件

$$\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j), \ P(\alpha_i) = 0 \ (1 \leq i \leq n+1)$$

を満たすとします．このとき

$$P(x) = 0$$

が成立します.

Proof. 因数定理によって $P(\alpha_1) = 0$ から

$$P(x) = (x-\alpha_1)P_1(x)$$

を満たす $P_1(x) \in \mathbf{K}[x]$ が存在します．さらに $P(\alpha_2) = 0$ と $\alpha_1 \neq \alpha_2$ が成立しますから

$$0 = P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)P_1(\alpha_2)$$

から $P_1(\alpha_2) = 0$ が従います．よって因数定理を用いると

$$P_1(x) = (x-\alpha_2)P_2(x), \ \text{従って}\ P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)P_2(x)$$

を満たす $P_2(x) \in \mathbf{K}[x]$ が存在することが分かります．このプロセスを繰り返します．すなわち，いま $i \leq n-1$ を満たす i に対して

$$P(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_i)P_i(x)$$

を満たす $P_i(x) \in \mathbf{K}[x]$ が存在するとします．$x = \alpha_{i+1}$ を代入すると

$$0 = P(\alpha_{i+1}) = (\alpha_{i+1} - \alpha_1)\cdots(\alpha_{i+1} - \alpha_i)P_i(\alpha_{i+1})$$

が従います．さらに $\alpha_{i+1} \neq \alpha_k \ (k = 1, \cdots, i)$ から

$$P_i(\alpha_{i+1}) = 0$$

を得ます．よって因数定理から

$$P_i(x) = (x - \alpha_{i+1})P_{i+1}(x) \text{ 従って } P(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_{i+1})P_{i+1}(x)$$

を満たす $P_{i+1}(x) \in \mathbf{K}[x]$ が存在することが分かります．特に $i = n - 1$ のとき

$$P(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)P_n(x)$$

となります．この両辺の次数を考えると

$$n \geq \deg(P) = n + \deg(P_n)$$

から

$$\deg(P_n) \leq 0$$

が分かります．すなわち $P_n(x) = \alpha \in \mathbf{K}$ であることが導かれました．

$$P(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)\alpha$$

に $x = \alpha_{n+1}$ を代入すると

$$0 = P(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1} - \alpha_1)\cdots(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\alpha$$

から $\alpha = 0$ であることがが結論できます．以上で $P(x) = 0$ であることが証明できました．

□

2.3　公約式・最大公約式

多項式 $f(t), g(t) \in \mathbf{K}[t]$ が与えられているとします．f が g で**割り切れる**とは，f を g で割った剰余が 0 ということです．すなわち

$$f(t) = g(t)h(t)$$

を満たす $h(t) \in \mathbf{K}[t]$ が存在することです．このとき g を f の**因子** (divisor) と呼び

$$g(t)|f(t)$$

と記します．

多項式 $f_1(t), \cdots, f_\ell(t) \in \mathbf{K}[t]$ すべての因子である $g(t) \in \mathbf{K}[t]$ を**公約式**と呼びます：

$$g(t)|f_1(t),\ \cdots, g(t)|f_\ell(t)$$

このとき次数について

$$\deg(g(t)) \leq \deg(f_i(t)) \quad (i = 1, \ddots, \ell)$$

が成立するので，最大次数の公約式 $d(t)$ が存在することが分かり．　**最大公約式**と呼びます．証明を考えるときに，$1 \in \mathbf{K}[t]$ が公約式になることにも注意しよう．ここで最高次の係数が 1 とすると[2]最大公約式はただ一つ存在することが示ます．そのための道はいろいろありますが，ここでは**（拡張）ユークリッドの互除法**を用いることにします[3]．

[2]最高次数の係数が 1 である多項式 $t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ddots + a_1 t + a_0$ のことをモニック (monic) な多項式と呼びます．
[3]線型代数学の教科書にはイデアル（Ideal）を用いる流れを示してあります．

2.4 （拡張）ユークリッドの互除法

定理 2.2（剰余定理）の応用として，2 つの多項式 $f(x), g(x) \in \mathbf{K}[x]$ の最大次数の共通因子を求める **（拡張）ユークリッドの互除法**を解説します．まず拡張版でない互除法についてです．

まず $f_0 := f$，$f_1 := g$ として，以下のように割り算を繰り返します．

$f_0(x) = f(x)$ を $f_1(x) = g(x)$ で割るとき	商：$q_1(x)$	剰余：$f_2(x)$
$f_1(x) = g(x)$ を $f_2(x)$ で割るとき	商：$q_2(x)$	剰余：$f_3(x)$
$f_2(x)$ を $f_3(x)$ で割るとき	商：$q_3(x)$	剰余：$f_4(x)$
$f_3(x)$ を $f_4(x)$ で割るとき	商：$q_4(x)$	剰余：$f_5(x)$
	$\vdots$	
$f_{k-2}(x)$ を $f_{k-1}(x)$ で割るとき	商：$q_{k-1}(x)$	剰余：$f_k(x)$
	$\vdots$	

とします．このとき

$$f_0(x) = q_1(x)f_1(x) + f_2(x) \tag{0}$$
$$f_1(x) = q_2(x)f_2(x) + f_3(x) \tag{1}$$
$$f_2(x) = q_3(x)f_3(x) + f_4(x) \tag{2}$$
$$\vdots$$
$$f_{j-2}(x) = f_{j-1}(x)q_{j-1}(x) + f_j(x) \tag{j}$$
$$\vdots$$

となります．剰余の次数に着目すると

$$\deg(f_1) > \deg(f_2) > \deg(f_3) > \cdots$$

と 1 以上小さくなっていきますから，ある時点で

$$\deg(f_{k+1}) = -\infty$$

従って

$$f_{k-1}(t) = q_k(t)f_k(t)$$

となります．以上のプロセスで

$$f_{j-2}(x) = q_{j-1}(x)f_{j-1}(x) + f_j(x)$$

において f_{j-2} と f_{j-1} の共通因子であることと f_{j-1} と f_j の共通因子であることは必要十分です．従って f_0 と f_1 の共通因子と f_{k-1} と f_k の共通因子は一致します．f_k が f_{k-1} と f_k の最大公約式なので，f_0 と f_1 の最大公約式であることが従います．

次に上で求めた $f(t)$ と $g(t)$ の最大公約式 $d(t) = f_k(t)$ に対して

$$a(t)f(t) + b(t)g(t) = d(t)$$

を満たす $a(t), b(t) \in \mathbf{K}[t]$ を求めることを考えましょう．ここでは上で求めた $f_0, f_1, \ddots, f_k$ に対して順次

$$a(t)_i f(t) + b_i(t)g(t) = f_i(t)$$

を満たす $a_i(t), b_i(t)$ を定めていく形で $a(t) = a_k(t), b(t) = b_k(t)$ を求めていきます.

最初に

$$a_0 = 1,\ b_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = 1$$

と定めます．すると $f = f_0, g = g_1$ と (0),(1) に注意すると

$$a_0 f + b_0 g = f_0, \quad a_1 f + b_1 g = f_1$$

が成立します．帰納的に

$$a(t)_i f(t) + b_i(t)g(t) = f_i(t)$$

が $i = 0, 1, \ddots, j$ に対しているとして

$$a_{j+1} := a_{j-1} - q_j a_j, \quad b_{j+1} := b_{j-1} - q_j b_j$$

と定めると (j-1) によって

$$\begin{aligned} f_{j+1} &= f_{j-1} - q_j f_j \\ &= (a_{j-1}f + b_{j-1}g) - q_j(a_j f + b_j g) \\ &= (a_{j-1} - q_j a_j)f + (b_{j-1} - q_j b_j) \\ &= a_{j+1}f + b_{j+1}g \end{aligned}$$

となります．これを繰り返していくと

$$a_k f + b_k g = f_k$$

となります．$a(t) = a_k(t),\ b(t) = b_k(t)$ と定めると

$$a(t)f(t) + b(t)g(t) = d(t) \tag{2.6}$$

が成立することが分かります.

定理 2.5.

$$(f, g) := \{h_1(t)f(t) + h_2(t)g(t) \in \mathbf{K}[t];\ h_1(t), h_2(t) \in \mathbf{K}[t]\}$$

$$(d) := \{d(t)h(t) \in \mathbf{K}[t];\ h(t) \in \mathbf{K}[t]\}$$

と定めると

$$(f, g) = (d)$$

が成立します.

Proof. 任意の $p \in (f, g)$ を取ります．すると

$$p(t) = h_1(t)f(t) + h_2(t)g(t),\ h_1(t), h_2(t) \in \mathbf{K}[t]$$

と表されます．$d(t)$ は $f(t)$ と $g(t)$ の公約数ですから

$$f(t) = p_1(t)d(t), \quad g(t) = p_2(t)d(t)$$

がある $p_1(t), p_2(t) \in \mathbf{K}[t]$ に対して成立します．このとき

$$p(t) = h_1(t)p_1(t)d(t) + h_2(t)p_2(t)d(t) = (h_1(t)p_1(t) + h_2(t)p_2(t))d(t) \in (d)$$

から $(f, g) \subset (d)$ であることが分かります．
　逆に $p(t) \in (d)$ をとると，ある $q(t) \in \mathbf{K}[t]$ に対して

$$p(t) = d(t)q(t) = (a(t)f(t) + b(t)g(t))q(t) = a(t)q(t)f(t) + b(t)q(t)g(t) \in (f, g)$$

となりますから $(d) \subset (f, g)$ であることが分かります．　□

　(d) を $d(t)$ が生成する**イデアル**, (f, g) を $f(t)$ と $g(t)$ が生成するイデアルと呼びます．

定理 2.6. $c(t) \in \mathbf{K}[t]$ が $f(t)$ と $g(t)$ の公約式であるとします：

$$c(t)|f(t), c(t)|g(t)$$

このとき $c(t)|d(t)$ が成立します．

Proof. 仮定から

$$f(t) = q_1(t)c(t),\ g(t) = q_2(t)c(t)$$

がある $q_1(t), q_2(t) \in \mathbf{K}[t]$ に対して成立します．この状況で

$$d(t) = a(t)f(t) + b(t)g(t) = a(t)q_1(t)c(t) + b(t)q_2(t)c(t) = (a(t)q_1(t) + b(t)q_2(t))c(t)$$

となりますから，$c|d$ が分かります．　□

　ここで $c(t)$ として $f(t)$ と $g(t)$ に別の最大公約式 $d'(t)$ を考えます．$d'(t)$ は $f(t)$ と $g(t)$ の公約式なので定理 2.6 を用いると

$$d(t) = d'(t)\alpha$$

を満たす $\alpha \in \mathbf{K}^* := \mathbf{K} \setminus \{0\}$ が存在します．これが**最大公約式の一意性**です．

演習問題

I $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

を示しましょう.

II (1) $a, b \in \mathbf{R}$ が $a, b \geq 0$ を満たすとします.

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

を示しましょう.

(2) $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$ が

$$a_1, \cdots, a_n \geq 0$$

を満たすとします.

$$a_1 + \cdots + a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$$

が成立することを示しましょう.

III (1) $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

を示しましょう.

(2) $z \in \mathbf{C},\ z \neq 0$ のとき

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

を示しましょう.

(3) $z \in \mathbf{C}$ であるとき

$$z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$

を示しましょう.

(4) 実係数の多項式

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

を考えます. すなわち上の式において

$$a_0, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$$

とします. このとき $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\overline{\alpha}) = 0$$

を示しましょう.

IV $P_1(x), P_2(x) \in \mathbf{K}[x]$ に対して

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = 0 \Rightarrow P_1(x) = 0 \text{ または } P_2(x) = 0$$

であることを示しましょう.

V $z, w \in \mathbf{C}$ が $z, w \neq 0$ を満たしているとします.

$$z = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad w = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

と極形式で表されるとき

$$zw = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z^{-1} = r_1^{-1}(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$$

となることを示しましょう.

VI

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \neq 1$$

であるとき

$$z^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$$

とします．このとき

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{z^{n+1} - 1}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})}$$

であることを用いて

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta, \quad \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta$$

を求めましょう.

VII(1) $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$, $\alpha \neq \gamma$ とします．このとき

$$g(x) = \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

が

$$g(\alpha) = 1, \quad g(\beta) = g(\gamma) = 0$$

を満たすことを示しましょう.

(2) (1) において $A, B, C \in \mathbf{C}$ とします．f が 2 次多項式で

$$f(\alpha) = A,\ f(\beta) = B,\ f(\gamma) = C$$

ならば

$$f(x) = A\frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + B\frac{(x - \alpha)(x - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + C\frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

となることを示しましょう.

VIII $a, b \in \mathbf{R}$ とします.

$$f(x) = ax^4 - 2ax^3 + (a+1)x^2 - bx - b$$

において

$$f(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 0$$

とします.
(1) a, b を求めましょう.
(2) f の他の根を求めましょう.

IX

$$f(x) = x^{2n} + x^n + 1$$

が $x^2 + x + 1$ で割り切れるか調べましょう.

X

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

とします.
(1) $z^n - 1 = 0$ の解が $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$ であることを示しましょう.
(2)

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1}) = n$$

となることを示しましょう.

XI 以下の多項式 $f(x)$, $g(x)$ の最大共通因子を最高次数の係数が 1 として求めましょう.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = 4x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 11x + 3$$

XII $z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$ を満たす $z \in \mathbf{C}$ をすべて求めましょう.
XIII $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ が $ad - bc \neq 0$ を満たすとする. $\mathbf{C}$ の部分集合 D を

$$D = \begin{cases} \mathbf{C} & (c = 0\text{のとき}) \\ \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & (c \neq 0\text{のとき}) \end{cases}$$

とします. 写像

$$f:\ D \to \mathbf{C} \quad z \mapsto w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

によって定義する.
(1) f が単射であることを示しましょう.
(2) $f(D)$ を求めましょう.
(3) 全単射 $f:\ D \to f(D)$ の逆写像 f^{-1} を求めましょう.

XIV $\mathbf{C}$ の部分集合 $D := \mathbf{C} \setminus \{i\}$ 上で定義された写像

$$f:\ D \to \mathbf{C} \quad z \mapsto w = f(z) = \frac{1 - iz}{1 + iz}$$

について考えます.
(1) $f(D) \subset \mathbf{C} \setminus \{-1\}$ であることを示しましょう.
(2) $f(D) = \mathbf{C} \setminus \{-1\}$ であることを示しましょう.
(3) f が単射であることを示しましょう.
(4) 全単射 $f:\ D \to f(D)$ の逆写像を求めましょう.
(5) $A = \{z \in D;\ |z - (1+i)| = 1\}$ に対して $f(A)$ を求めましょう.
(6) $f(\mathbf{R})$ を求めましょう.
XV 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ を差分方程式

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \quad a_0 = \alpha, a_1 = \beta$$

によって定義します. a_n を求めましょう. ただし解が最終的に虚数単位を含まないものにしましょう.

I $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

を示しましょう.

解答

$$z = a + ib, \quad w = c + id \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

と z と w の実部と虚部を表します．このとき

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

から

$$\begin{aligned}|z \cdot w|^2 &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2 \cdot |w|^2\end{aligned}$$

が従います．$|z|, |w|, |zw| \geq 0$ なので両辺の平方根をとると

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

であることが分かります.

II(1) $a, b \in \mathbf{R}$ が $a, b \geq 0$ を満たすとします.

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

を示しましょう.
(2) $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$ が

$$a_1, \cdots, a_n \geq 0$$

を満たすとします.

$$a_1 + \cdots + a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$$

が成立することを示しましょう.

解答 (1) ($\Leftarrow$) は明らかですから ($\Rightarrow$) を証明します.

$a > 0$ とすると $b = -a < 0$ となりますから $b \geq 0$ に反します．従って $a \leq 0$ であることが分かります．ここで条件 $a \geq 0$ を用いると $a = 0$ が分かります．$a + b = 0$ を仮定していますから $b = 0$ も従います．以上で

$$a = b = 0$$

であることを示しました.
(2) ($\Leftarrow$) は明らかですから ($\Rightarrow$) を証明します．帰納法を用いて証明しますから $n-1$ で成立するとします.

$$a_1 + \ldots + a_{n-1} \geq 0, \quad a_n \geq 0$$

が成立しますから (1) を用いると $a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$ から

$$a_1 + \ldots + a_{n-1} = 0, \quad a_n = 0$$

が従います．(n-1) の場合（帰納法の仮定）を用いると $a_1 + \ldots + a_{n-1} = 0$ から

$$a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$$

も従います．以上で $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ の下で

$$a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$$

が従うことを示しました.

III (1) $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

を示しましょう.
(2) $z \in \mathbf{C},\ z \neq 0$ のとき

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

を示しましょう.
(3) $z \in \mathbf{C}$ であるとき

$$z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$

を示しましょう.

解答 (1)

$$z = a + ib, \quad w = c + id \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

と z と w の実部と虚部を表します．このとき

$$z \pm w = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

から

$$\begin{aligned}
\overline{z \pm w} &= (a \pm c) - i(b \pm d) \\
\overline{z} \pm \overline{w} &= \overline{a + ib} \pm \overline{c + id} \\
&= (a - ib) \pm (c - di) \\
&= (a \pm c) - i(b \pm d)
\end{aligned}$$

となるので

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$$

が従います.

(2) 次に

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(ac-bd)+i(bc+ad)} \\ &= (ac-bd)-i(bc+ad) \\ \overline{z}\cdot\overline{w} &= (a-ib)(c-id) \\ &= (ac-bd)-i(bc+ad)\end{aligned}$$

から

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

が従います．最後に

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

から

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$$

が分かります.

(3)

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$$

が分かりますから

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

が従います.

(3) $z = a+ib \quad (a, b \in \mathbf{R})$ とします．$z = a \in \mathbf{R}$ とすると

$$\overline{z} = a = z$$

から $z = \overline{z}$ が従います．逆に $z = \overline{z}$ とすると

$$a+ib = a-ib \quad \text{から} \quad b = 0$$

が従いますから，$z = a \in \mathbf{R}$ であることが分かります.

III(4) 実係数の多項式
$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$
を考えます．すなわち上の式において
$$a_0, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$$
とします．このとき $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して
$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\overline{\alpha}) = 0$$
を示しましょう．

解答 $f(\alpha) = 0$ すなわち
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0 \tag{1}$$
が成立するとします．
$$\overline{\alpha^k} = (\overline{\alpha})^k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$
が成立することを帰納的に示せますから，(1) の両辺の複素共役をとると
$$\begin{aligned}\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0} &= \overline{a_n} \cdot \overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \overline{a_0} \\ &= a_n \cdot \overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\alpha} + a_0 \\ &= f(\overline{\alpha}) = 0\end{aligned}$$
が分かります．

IV $P_1(x), P_2(x) \in \mathbf{K}[x]$ に対して
$$P_1(x) \cdot P_2(x) = 0 \Rightarrow P_1(x) = 0 \text{ または } P_2(x) = 0$$
であることを示しましょう．

解答 P_1, P_2 が $\deg(P_1), \deg(P_2) \geq 0$ とすると
$$\deg(P_1P_2) = \deg(P_1) + \deg(P_2) \geq 0$$
となり，$P_1P_2 = 0$ となりません．従って
$$\deg(P_1) = -\infty \quad \text{または} \quad \deg(P_2) = -\infty$$

すなわち

$$P_1 = 0 \quad \text{または} \quad P_2 = 0$$

となります.

V $z, w \in \mathbf{C}$ が $z, w \neq 0$ を満たしているとします.

$$z = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad w = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

と極形式で表されるとき

$$zw = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z^{-1} = r_1^{-1}(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$$

となることを示しましょう.

解答

$$\begin{aligned} zw &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right) \\ &= r_1 r_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)} \\ &= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\cos\theta_1 - i\sin\theta_1}{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)} \\ &= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)}{\cos^2\theta_1 + \sin\theta_1^2} = \frac{1}{r_1} \cdot (\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)) \end{aligned}$$

VI

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \neq 1$$

であるとき

$$z^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$$

とします．このとき

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{z^{n+1}-1}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})}$$

であることを用いて

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta, \quad \sum_{k=0}^{n}\sin k\theta$$

を求めましょう．

解答 $z = \cos\theta + i\sin\theta \neq 1$ のとき帰納法を用いると

$$z^k = \cos k\theta + i\sin k\theta \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

が成立することが分かります．さらに

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta + i\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta &= \sum_{k=0}^{n}(\cos k\theta + i\sin k\theta) \\
&= \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \\
&= \frac{z^n - 1}{z^{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}\right)} = \frac{z^{\frac{n+1}{2}}\left(z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}\right)}{z^{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}\right)} = z^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \left(\cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}\right) \cdot \frac{2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} + i\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

から

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

であることが分かります．

VII(1) $\alpha \neq \beta,\, \beta \neq \gamma,\, \alpha \neq \gamma$ とします．このとき

$$g(x) = \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

が

$$g(\alpha) = 1, \quad g(\beta) = g(\gamma) = 0$$

を満たすことを示しましょう．

(2) (1) において $A, B, C \in \mathbf{C}$ とします．f が 2 次多項式で

$$f(\alpha) = A,\ f(\beta) = B,\ f(\gamma) = C$$

ならば

$$f(x) = A\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + B\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + C\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

となることを示しましょう．

解答 (1) 省略

(2)

$$h(x) = A\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + B\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + C\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

と定義します．このとき

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = A \\ h(\beta) &= A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 = B \\ h(\gamma) &= A \cdot 0 + B \cdot 0 + 1 \cdot 0 = C \end{aligned}$$

となりますから

$$(f-h)(\alpha) = (f-h)(\beta) = (f-h)(\gamma) = 0$$

が従います．さらに

$$\deg(f-h) \leq 2$$

が成立しますから

$$f - h = 0$$

であることが分かります．

VIII $a, b \in \mathbf{R}$ とします.

$$f(x) = ax^4 - 2ax^3 + (a+1)x^2 - bx - b$$

において

$$f(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 0$$

とします.
(1) a, b を求めましょう.
(2) f の他の根を求めましょう.

解答 $x_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ とします．このとき

$$\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \quad \text{から} \quad x_0^2 - x_0 + 1 = 0$$

が従います．筆算

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & ax^2 & - & ax & + & 1-a & & & & \\
\cline{3-11}
x^2-x+1 &) & ax^4 & - & 2ax^3 & + & (a+1)x^2 & - & bx & - & b \\
 & & ax^4 & - & ax^3 & + & ax^2 & & & & \\
\cline{3-11}
 & & & - & ax^3 & + & x^2 & - & bx & - & b \\
 & & & - & ax^3 & + & ax^2 & - & ax & & \\
\cline{4-11}
 & & & & & & (1-a)x^2 & - & (b-a)x & - & b \\
 & & & & & & (1-a)x^2 & - & (1-a)x & + & 1-a \\
\cline{6-11}
 & & & & & & & & (1-b)x & + & a-b-1
\end{array}$$

から

$$f(x) = (ax^2 - ax + (1-a))(x^2 - x + x) + (1-b)x + a - b - 1 \tag{1}$$

と割り算できます．$x = x_0$ を代入すると

$$0 = f(x_0) = (1-b)x_0 + a - b - 1$$

を得ます．$b \neq 1$ ならば $x_0 \in \mathbf{R}$ となりますから $b = 1$ であることが分かります．さらに $a-b-1 = 0$ も成立しますから $a = 2$ であることが分かります．(1) は

$$f(x) = (2x^2 - 2x + 1)(x^2 - x + x)$$

となりますから，x_0 と異なる解は

$$x = \frac{1 \pm i}{2},\ \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

であることが分かります．

別解　$x_0^2 - x_0 + 1 = 0$ の両辺に $x_0 + 1$ を掛けると

$$x_0^3 + 1 = 0 \quad 従って \quad x_0^3 = -1$$

であることが分かります．これから

$$\begin{aligned} f(x_0) &= ax_0^4 - 2ax_0^3 + (a+1)x_0^2 - bx_0 - b \\ &= -ax_0 + 2a + (a+1)(x_0 - 1) - bx_0 - b \\ &= (1-b)x_0 + a - b - 1 = 0 \end{aligned}$$

が従います．

IX

$$f(x) = x^{2n} + x^n + 1$$

が $x^2 + x + 1$ で割り切れるか調べましょう．

解答

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

とおくと

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

となります．ここで $f(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割り算しておきます．すなわち

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1) + Ax + B \tag{1}$$

を満たす $A, B \in \mathbf{R}$ が存在します．ここで $x = \omega$ を代入すると

$$f(\omega) = A\omega + B \tag{2}$$

となります．そこで $f(\omega)$ を n を 3 で割った余りで場合分けして求めます．

(i) $\underline{n = 3k\ のとき}$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{6k} + \omega^{3k} + 1 = \left(\omega^3\right)^{2k} + \left(\omega^3\right)^k + 1 \\ &= 1^{2k} + 1^k + 1 = 3 \end{aligned}$$

から (2) は

$$A\omega + B = 3$$

となります．これを $A\omega + (B-3) = 0$ とすると $\omega \notin \mathbf{R}$ から $A = 0, B = 3$ となりますから (1) は

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1) + 3$$

となります.
(ii) $\underline{n = 3k+1 \text{ のとき}}$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{6k+2} + \omega^{3k+1} + 1 = \left(\omega^3\right)^2 k\omega^2 + \left(\omega^3\right)^k \omega + 1 \\ &= 1^{2k}\omega^2 + 1^k\omega + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

から (2) は

$$A\omega + B = 0$$

となります. $\omega \notin \mathbf{R}$ から $A = 0, B = 0$ となりますから (1) は

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1)$$

となります.
(iii) $\underline{n = 3k+2 \text{ のとき}}$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{6k+4} + \omega^{3k+2} + 1 = \left(\omega^3\right)^{2k+1} \omega + \left(\omega^3\right)^k \omega^2 + 1 \\ &= 1^{2k+1}\omega + 1^k\omega^2 + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

から (2) は

$$A\omega + B = 0$$

となります. $\omega \notin \mathbf{R}$ から $A = 0, B = 0$ となりますから (1) は

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1)$$

となります.
　以上から $f(x)$ が $x^2 + x + 1$ で割り切れる必要十分条件は n が 3 で割り切れないことが示されました.

X

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

とします.
(1) $z^n - 1 = 0$ の解が $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$ であることを示しましょう.
(2)

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1}) = n$$

となることを示しましょう.

解答 $z^n = 1$ のとき $|z|^n = 1$ から $|z| = 1$ であることが分かります. 従って

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と $\theta \in \mathbf{R}$ を用いて表されます.

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad 0 \leq n\theta < 2n\pi$$

から

$$n\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2(n-1)\pi$$

すなわち

$$\theta = \frac{2k}{n}\pi \quad (k = 1, 1, 2, \ldots, n-1)$$

であることが分かります. 従って解は

$$z = 1, e^{i\frac{2}{n}\pi}, e^{i\frac{4}{n}\pi}, \ldots, e^{i\frac{2(n-1)}{n}\pi}$$

は $\alpha = e^{i\frac{2}{n}\pi}$ を用いて

$$z = 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$$

と表現されます. 以上で

$$z^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$$

であることが示されました. よって

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + \ldots + z + 1) = (z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)\ldots(z-\alpha^{n-1})$$

から

$$z^{n-1} + \ldots + z + 1 = (z-\alpha)(z-\alpha^2)\ldots(z-\alpha^{n-1})$$

であることが示されました. ここで $z = 1$ を両辺に代入すると

$$n = (1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{n-1})$$

であることが従います.

XI 以下の多項式 $f(x)$, $g(x)$ の最大共通因子を最高次数の係数が 1 として求めましょう.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = 4x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 11x + 3$$

解答

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & -2 & 5 & -4 & 3 \\
 & 4 & -8 & 20 & -16 & 12 \\
+) & -4 & -5 & 5 & -9 & \\
\hline
 & & -13 & 25 & -25 & 12 \\
 & & -52 & 100 & -100 & 48 \\
 & -) & -52 & -65 & 65 & -117 \\
\hline
 & & & 165 & -165 & 165 \\
 & & & 1 & -1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & 4 & -12 & 15 & -11 & 3 \\
-) & 4 & -8 & 20 & -16 & 12 \\
\hline
 & & -4 & -5 & 5 & -9 \\
 & -) & -4 & 4 & -4 & \\
\hline
 & & & -9 & 9 & -9 \\
 & & -) & -9 & 9 & -9 \\
\hline
 & & & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

上の計算から共通因子で最高次数の係数が 1 であるものは x^2-x+1 であることが分かります．より詳しくは以下のようにして理解します．

$$\begin{aligned}
g(x)-4f(x) &= -4x^3-4x^5+5x-9(=r_1(x)\text{とします})\\
4f(x)-xr_1(x) &= -13x^3+25x^2-25x+12\\
&\text{両辺を 4 倍して}\\
16f(x)-4xr_1(x) &= -52x^3+100x^2-100x+48\\
16f(x)-4xr_1(x)-13r_1(x) &= 16f(x)-(4x+13)r_1(x)\\
&= 165x^2-165x+165=165(x^2-x+1)\\
r_1(x) &= -(4x+9)(x^2-x+1)
\end{aligned}$$

XII $z^4=8(-1+i\sqrt{3})$ を満たす $z\in\mathbf{C}$ をすべて求めましょう．

解答

$$z^4=8(-1+i\sqrt{3})$$

の両辺の絶対値をとると

$$|z|^4=8\cdot 2=16$$

となりますから $|z|=2$ であることが分かります．$w=\frac{z}{2}$ と定めると

$$w^4=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2}{3}\pi} \tag{1}$$

が成立します．$|w|=1$ が成立しますから

$$w=\cos\theta+i\sin\theta,\quad 0\le\theta<2\pi$$

である $\theta\in\mathbf{R}$ が存在します．(1) から

$$e^{i4\theta}=e^{i\frac{2}{3}\pi},\quad 0\le 4\theta<8\pi$$

から

$$4\theta=\frac{2\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ \frac{14\pi}{3},\ \frac{20\pi}{3},$$

すなわち

$$\theta=\frac{2\pi}{12},\ \frac{8\pi}{12},\ \frac{14\pi}{12},\ \frac{20\pi}{12}$$

となります．以上で

$$z=2e^{i\frac{\pi}{6}},\ 2e^{i\frac{2\pi}{3}},\ 2e^{i\frac{7\pi}{6}},\ 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

であることが分かりました．