1　線型写像と行列の積

$\mathbf{K}^m$ を m 次元列ベクトル全体の集合とします．$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ を束ねた m 行 n 列の行列を

$$A = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_j \ \cdots \ \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と定めます．A に $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$ を右から

$$A\vec{x} := x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \begin{pmatrix} \vdots \\ x_1 a_{i1} + \cdots + x_n a_{in} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

と掛けることができます．このとき $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^m$ であることから $A\vec{x} \in \mathbf{K}^m$ が分かります．

一般に n 次元行ベクトル $\mathbf{b} = (b_1 \ \cdots \ b_n)$ と $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ の積を

$$\mathbf{b} \cdot \vec{x} = b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n$$

と定義します．このとき $A\vec{x}$ は A の行ベクトル表示 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$ を用いて

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i\vec{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m\vec{x} \end{pmatrix}$$

と表現できます．実際の計算はこれを用いて行うことがほとんどでしょう．

以下 m 行 n 列の行列全体を $M_{m,n}(\mathbf{K})$ と表します．

$A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ が与えられているとします．このとき

$$\begin{aligned} F_A : \ \mathbf{K}^n &\to \ \mathbf{K}^m \\ \vec{x} &\mapsto \ A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n \end{aligned}$$

を A が定める**線型写像**と呼びます．この「線型写像」はどのような意味だろうか．

一般に，写像

$$F : \ \mathbf{K}^n \to \ \mathbf{K}^m$$

が $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n$, $\lambda \in \mathbf{K}$ に対して

$$F(\vec{x} + \vec{y}) = F(\vec{x}) + F(\vec{y}), \quad F(\lambda\vec{x}) = \lambda F(\vec{x})$$

を満たすとき，F は**線型**であるといいます．この定義を与える条件は

$$F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n, \ \lambda, \mu \in \mathbf{K})$$

と必要十分であることに注意しましょう．

F_A が線型であることを示しましょう．

$$\begin{aligned}
F_A(\vec{x}+\vec{y}) &= A(\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n)\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \\
&= (x_1+y_1)\vec{a}_1 + \cdots + (x_n+y_n)\vec{a}_n \\
&= x_1\vec{a}_1 + y_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n + y_n\vec{a}_n \\
&= x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n + y_1\vec{a}_1 + \cdots + y_n\vec{a}_n \\
&= A\vec{x} + A\vec{y} = F_A(\vec{x}) + F_A(\vec{y}) \\
F(\lambda\vec{x}) &= (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n)\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \\
&= (\lambda x_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\lambda x_n)\vec{a}_n \\
&= \lambda(x_1\vec{a}_1) + \cdots + \lambda(x_n\vec{a}_n) \\
&= \lambda(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n) = \lambda(A\vec{x}) = \lambda F_A(\vec{x})
\end{aligned}$$

以上で F_A が線型，すなわち

$$F_A(\vec{x}+\vec{y}) = F_A(\vec{x}) + F_A(\vec{y}), \quad F_A(\lambda\vec{x}) = \lambda F_A(\vec{x})$$

が成立することが示されました．これは実質的には

$$A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \quad A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x})$$

が成立することを意味します[1]，実はここで定義した F_A の線型性から行列演算の大事な性質が導かれます．$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_\ell \in \mathbf{K}^n$ に対して帰納的に

$$F_A(\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_\ell) = F_A(\vec{x}_1) + \cdots + F_A(\vec{x}_\ell), \ \textit{i.e.}\ A(\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_\ell) = A\vec{x}_1 + \cdots + A\vec{x}_\ell$$

を導くことができます．これを用いると $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_\ell \in \mathbf{K}^n$ と $c_1, \cdots, c_\ell \in \mathbf{K}$ に対して

$$F_A(c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_\ell\vec{b}_\ell) = F_A(c_1\vec{b}_1) + \cdots + F_A(c_\ell\vec{b}_\ell) = c_1F_A(\vec{b}_1) + \cdots + c_\ell F_A(\vec{b}_\ell)$$

すなわち

$$A(c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_\ell\vec{b}_\ell) = c_1 \cdot A\vec{b}_1 + \cdots + c_\ell \cdot A\vec{b}_\ell \tag{1}$$

が導けます．ここで $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_\ell \in \mathbf{K}^n$ を束ねて $B = (\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_\ell) \in M_{n,\ell}(\mathbf{K})$ として，$\vec{c} \in \mathbf{K}^\ell$ を $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\ell \end{pmatrix}$ と定めると (1) は

$$A(B\vec{c}) = (A\vec{b}_1 \ \cdots \ A\vec{b}_\ell)\vec{c} \tag{2}$$

となります．さらに，2 つの行列 A と B の積を

$$AB := (A\vec{b}_1 \ \cdots \ A\vec{b}_\ell) \in M_{m,\ell}(\mathbf{K}) \tag{3}$$

[1]後に $\lambda A = (\lambda\vec{a}_1 \ \cdots \ \lambda\vec{a}_n)$ と行列の定数倍を定義しますが，これを用いると

$$A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) = (\lambda A)\vec{x}$$

となります．最後の等式があるので $\lambda A\vec{x}$ と書いても紛れないことになります．

と定めると (2) は

$$A(B\vec{c}) = AB \cdot \vec{c} \tag{4}$$

となります．これは写像の合成を用いると

$$F_A \circ F_B(\vec{c}) = F_{AB}(\vec{c}) \tag{5}$$

を意味します．$F_A \circ F_B\colon\ \mathbf{K}^\ell \to \mathbf{K}^m$, $F_{AB}\colon\ \mathbf{K}^\ell \to \mathbf{K}^m$ の定義域の任意のベクトル $\vec{c}$ に対して値が等しいので[2]

$$F_A \circ F_B = F_{AB} \tag{6}$$

と写像として等しいことが導けました．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{K}^\ell \arrow[r, "F_B"] \arrow[rr, bend right, "F_A \circ F_B = F_{AB}"'] & \mathbf{K}^n \arrow[r, "F_A"] & \mathbf{K}^m \end{tikzcd}$$

以上をまとめると

m 行 n 列の $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$, n 行 ℓ 列の $B = (\vec{b}_1\ \cdots\ \vec{b}_\ell) \in M_{n,\ell}(\mathbf{K})$ に対してその積は

$$AB := (A\vec{b}_1\ \cdots\ A\vec{b}_\ell) \in M_{m,\ell}(\mathbf{K})$$

と n 行 ℓ 列となり，ℓ 次元列ベクトル $\vec{c} \in \mathbf{K}^\ell$ に対して

$$A(B\vec{c}) = (AB)\vec{c}$$

が成立します．写像の形では

$$F_A \circ F_B = F_{AB}$$

が成立します．

となります．

先に進むために準備をします．n 次元の標準単位ベクトルを

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots$$

と定義します．例えば $n = 4$ のとき

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定義します．ここで n 次元列ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

[2]同一の定義域と値域を持つ写像 $f_1\colon\ X \to Y$, $f_2\colon\ X \to Y$ に対して

$$f_1(x) = f_2(x) \quad (\forall x \in X)$$

が成立するとき $f_1 = f_2$ と記します．

となります．例えば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 + w\vec{e}_4$$

となります．m 行 n 列の $A = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n) \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して

$$A\vec{e}_j = \vec{a}_j \quad (1 \leq j \leq n) \tag{7}$$

となることに注意しましょう．例えば $n = 4$ の場合は

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = A(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 + w\vec{e}_4) = xA\vec{e}_1 + yA\vec{e}_2 + zA\vec{e}_3 + wA\vec{e}_4$$

において x, y, z, w に代入すると分かります．(7) から m 行 n 列の $G, H \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して

$$\boxed{\text{(i) } G\vec{x} = H\vec{x} \quad (\vec{x} \in \mathbf{K}^n) \Leftrightarrow \text{(ii) } G\vec{e}_j = H\vec{e}_j \quad (1 \leq j \leq n) \Leftrightarrow \text{(iii) } G = H} \tag{8}$$

であることが分かります．自明でないのは (ii)⇒(iii) で，(ii) から $\vec{f}_j = \vec{g}_j$ $(1 \leq j \leq n)$ なので F と G のすべての成分が等しいことが分かります．従って (i)⇒(ii)⇒(iii) ⇒(i) と示すことができます．

今までと同様に $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$, $B \in M_{n,\ell}(\mathbf{K})$ であるとします．これに加えて $C = (\vec{c}_1 \ \cdots \ \vec{c}_p) \in M_{\ell,p}(\mathbf{K})$ も考えます．このとき A, B, C が定める線型写像

$$\mathbf{K}^p \underset{F_C}{\longrightarrow} \mathbf{K}^\ell \underset{F_B}{\longrightarrow} \mathbf{K}^n \underset{F_A}{\longrightarrow} \mathbf{K}^m$$

に対して写像の結合則を考えると

$$F_A \circ (F_B \circ F_C) = (F_A \circ F_B) \circ F_C$$

が成立することが分かります．さらに合成が行列の積と対応していることを用いると

$$F_A \circ F_{BC} = F_{AB} \circ F_C \quad \text{さらに} \quad F_{A(BC)} = F_{(AB)C}$$

従って

$$A(BC) = (AB)C$$

と行列の積の結合則が従います．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}^p \arrow[r, "F_C"] \arrow[rr, bend left, "F_B \circ F_C = F_{BC}"] \arrow[rrr, bend left=50, "F_A \circ F_{BC} = F_{A(BC)}"] \arrow[rrr, bend right=50, "F_{AB} \circ F_C = F_{(AB)C}"'] & \mathbf{K}^\ell \arrow[r, "F_B"] \arrow[rr, bend right, "F_A \circ F_B = F_{AB}"'] & \mathbf{K}^n \arrow[r, "F_A"] & \mathbf{K}^m
\end{tikzcd}$$

定理 $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$, $B \in M_{n,\ell}(\mathbf{K})$, $C \in M_{\ell,p}(\mathbf{K})$ に対して

$$A(BC) = (AB)C$$

が成立します．(4) を用いて

$$\begin{aligned}(AB)C &= ((AB)\vec{c}_1 \ \cdots \ (AB)\vec{c}_p) = (A(B\vec{c}_1) \ \cdots \ A(B\vec{c}_p)) \\ &= A(B\vec{c}_1 \ \cdots \ B\vec{c}_p)) = A(BC)\end{aligned}$$

と直接示すこともできます.

一般の線型写像 $F:\ \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ について考えます. 上で m 行 n 列の $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ が定める F_A の場合と同様に F の線型性から $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$F(\vec{x}) = x_1 F(\vec{e}_1) + \cdots + x_n F(\vec{e}_n) = (F(\vec{e}_1\ \cdots\ F(\vec{e}_n))\vec{x}$$

と成立します. これは $A = (F(\vec{e}_1\ \cdots\ F(\vec{e}_n)) \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して

$$F = F_A$$

が成立することを意味します. ここで

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m) := \{F:\ \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m;\ F\text{は線型}\}$$

と定義域が $\mathbf{K}^n$ で値域が $\mathbf{K}^m$ である線型写像全体の集合を定めると写像

$$\begin{array}{ccc} M_{m,n}(\mathbf{K}) & \xrightarrow{\ \Phi\ } & \mathrm{Hom}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m) \\ A & \longmapsto & F_A \end{array}$$

が全射であることを意味します. また (8) から Φ が単射であることも分かります. 実際 $A_1, A_2 \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して $F_{A_1} = F_{A_2}$ が成立すると任意の $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ に対して $A_1\vec{x} = A_2\vec{x}$ を意味しますが, これから $A_1 = A_2$ が従います. さらに全射 Φ の逆写像は

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m) & \xrightarrow{\ \Psi\ } & M_{m,n}(\mathbf{K}) \\ F & \longmapsto & (F(\vec{e}_1)\ \cdots\ F(\vec{e}_n)) \end{array}$$

であることも分かります.

最後に m 行 n 列の $A = (\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_m) \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して $F_A:\ \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ の像 $\mathrm{Im}(A)$ について考えます. 値域のベクトル $\vec{b} \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$\vec{b} \in \mathrm{Im}(F_A)\ \Leftrightarrow\ \exists \vec{x} \in \mathbf{K}^n\ \vec{b} = F_A(\vec{x})\ \Leftrightarrow\ \exists \vec{x} \in \mathbf{K}^n\ \vec{b} = A\vec{x}$$

が成立します. さらに $A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$ から

$$\vec{b} \in \mathrm{Im}(F_A)\ \Leftrightarrow\ \vec{b} \in L(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n) := \{x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n \in \mathbf{K}^m;\ x_j \in \mathbf{K}\ (j = 1, \cdots, n)\}$$

ここで

$$\mathrm{Im}(A) := \mathrm{Im}(F_A) = L(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n)$$

と定義して, A の**像**と呼びます.

$\mathrm{Im}(A)$ は和とスカラー倍について閉じています：

$\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbf{K}^n$ と $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ に対して

$$\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathrm{Im}(A)\ \Rightarrow \lambda\vec{y}_1 + \mu\vec{y}_2 \in \mathrm{Im}(A)$$

実際, $\vec{y}_1 = A\vec{x}_1$, $\vec{y}_2 = A\vec{x}_2$ を満たす $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbf{K}^n$ が存在するので

$$\lambda\vec{y}_1 + \mu\vec{y}_2 = \lambda A\vec{x}_1 + \mu A\vec{x}_2 = A(\lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2) \in \mathrm{Im}(A)$$

が成立します. 最後の等号ににおいて通常の逆向きに A 倍の線型性を使っているのでなかなか見づらいかもしれません.

一般に $\mathbf{K}^m$ の部分集合 V が和とスカラー倍について閉じているとき：

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \;\; \Rightarrow \;\; \lambda\vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

V は $\mathbf{K^m}$ の**部分空間**であるといいます.

演習 1.1. m 行 n 列の行列 $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して

$$\ker(A) := \{\vec{x} \in \mathbf{K}^n;\;\; A\vec{x} = \vec{0}\}$$

が $\mathbf{K}^n$ の部分空間であることを示しましょう. $\ker(A)$ を A の**核**または**解空間**と呼びます.

演習 1.2. （*2025L04 05/01* の補足問題*)* 以下の行列の積を計算しましょう.
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ***(2)*** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ***(3)*** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ***(4)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
(5) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ***(6)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ***(7)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ***(8)*** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
(9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ***(10)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ***(11)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ***(12)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
(13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

解答

演習 1.1 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{K}^n$ が $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker(A)$ を満たすとします．このとき $A\vec{v}_1 = A\vec{v}_2 = \vec{0}$ が成立しますが，

$$A(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) = \lambda A\vec{v}_1 + \mu A\vec{v}_2 = \lambda\vec{0} + \mu\vec{0} = \vec{0}$$

から $\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in \ker(A)$ であることが分かります．

演習 1.2

(1) $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\\x\\z \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\\y\\x \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\z\\y \end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix} \lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x\\y\\z \end{pmatrix}$ **(6)** $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\\lambda y\\z \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\y\\\lambda z \end{pmatrix}$ **(8)** $\begin{pmatrix} 1&\lambda&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\lambda y\\y\\z \end{pmatrix}$ **(9)** $\begin{pmatrix} 1&0&0\\\lambda&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\\lambda x+y\\z \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\lambda z\\y\\z \end{pmatrix}$ **(11)** $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\\lambda&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\y\\\lambda x+z \end{pmatrix}$ **(12)** $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&\lambda\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\y+\lambda z\\z \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&\lambda&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\y\\\lambda y+z \end{pmatrix}$

補足

・**(1)** について $I_3 := \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$ を 3 次の**単位行列**と呼びます．

・**(2)**–**(13)** について これから行基本変形が左から行列を掛けることに対応していることが分かります．ここで出てくる行列のことを 3 次の**基本行列**と呼びます．ただし，(5),(6),(7) では $\lambda \neq 0$ とします．対応する行基本変形を列記すると

(2) $1r \leftrightarrow 2r$ **(3)** $1r \leftrightarrow 3r$ **(4)** $2r \leftrightarrow 3r$ **(5)** $1r\times = \lambda$ **(6)** $2r\times = \lambda$ **(7)** $3r\times = \lambda$

(8) $1r+ = 2r\times\lambda$ **(9)** $2r+ = 1r\times\lambda$ **(10)** $1r+ = 3r\times\lambda$ **(11)** $3r+ = 1r\times\lambda$ **(12)** $2r+ = 3r\times\lambda$

(13) $3r+ = 2r \times \lambda$

となります．