

1 ベクトルの1次独立性

n 本の m 次元列ベクトル $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^m$ が条件

$$c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_m \vec{a}_m = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

を満たすとき、**1次独立**であるといいます。この条件は行列を用いると

$$(\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_n) \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0}$$

とも表現できます。1次独立でないとき、すなわち

$$\exists \vec{c} \neq \vec{0} \quad (\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_n) \vec{c} = \vec{0}$$

を満たすとき**1次従属**であるといいます。

以下 n が小さいときに定義について詳しく考えていきます。

$n = 1$ のとき

定理 1.1. $\vec{a} \in \mathbf{K}^n$ が $\vec{a} \neq \vec{0}$ を満たすとき $c \in \mathbf{K}$ に対して

$$c\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow c = 0$$

演習 1.1. 定理 1.1 を証明しましょう。

この定理 1.1 を用いると

$$\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \text{ は 1 次独立}$$

であることが分かります。この逆

$$\vec{a} \text{ は 1 次独立} \Rightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$$

も成立します。この対偶を示すとして、 $\vec{a} = \vec{0}$ とすると

$$1 \cdot \vec{a} = 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

から $\vec{a}$ は1次従属となります。以上で次の定理 1.2 が示せました。

定理 1.2. $\vec{a} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\vec{a} \text{ は 1 次独立} \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$$

$$\vec{a} \text{ は 1 次従属} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

次に

$$L(\vec{a}) := \{c\vec{a} \in \mathbf{K}^m; c \in \mathbf{K}\}$$

とすると

$$0\vec{a} = \vec{0}$$

が成立しますから $L(\vec{a}) \supset \{\vec{0}\}$ が成立します。この関連で定理 1.2 について考えてみると

定理 1.3. $\vec{a} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\vec{a} \text{ は 1 次独立} \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \Leftrightarrow L(\vec{a}) \supsetneq \{\vec{0}\}$$

$$\vec{a} \text{ は 1 次従属} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow L(\vec{a}) = \{\vec{0}\}$$

が成立することが分かります。ここです

$$L(\vec{a}) \supsetneq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow (L(\vec{a}) \supset \{\vec{0}\} \wedge L(\vec{a}) \neq \{\vec{0}\}) \Leftrightarrow L(\vec{a}) \neq \{\vec{0}\}$$

が成立することに注意しましょう。定理 1.3 をしつこく示しましょう。

$$\forall c \in \mathbf{K} \quad c \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

が成立しますから

$$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow L(\vec{a}) = \{\vec{0}\}$$

が成立します。この対偶を考えると

$$L(\vec{a}) \supsetneq \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$$

他方 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ならば

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \neq \vec{0}$$

なので $L(\vec{a}) \supsetneq \{\vec{0}\}$ が成立します。従って

$$\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow L(\vec{a}) \supsetneq \{\vec{0}\}$$

が成立します。この対偶を考えると

$$L(\vec{a}) = \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

が成立することも分かります。

最後に行基本変形との関連について考察します。

定理 1.4. $\vec{a} \in \mathbf{K}^m$ が $\vec{a} \neq \vec{0}$ を満すとしましょう。このとき

$$\vec{a} \rightarrow \cdots \rightarrow \vec{e}_1$$

となる行基本変形が存在します。

$\vec{a}$ の成分について

$$a_1 = \cdots = a_{i-1} = 0, \quad a_i \neq 0$$

が成立するとします。このとき

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \leftrightarrow ir} \begin{pmatrix} a_i \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \xrightarrow{1r * = \frac{1}{a_i}} \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \xrightarrow{jr * + = (-b_1) \times 1r (j=2, \dots, m)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

と行基本変形できます。

上で示した変形が掃き出し法の中核をなす大事なアルゴリズムになります。

$n = 2$ のとき $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^m$ とします。このとき

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ は 1 次独立} \Leftrightarrow (c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0)$$

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ は 1 次従属} \Leftrightarrow (\exists \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} = \vec{0})$$

が定義です。 $\vec{a}, \vec{b}$ は 1 次従属とします。 $c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} = \vec{0}$ において $c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ が成立するとします。

$$c_1 \neq 0 \text{ ならば } \vec{b} = -\frac{c_2}{c_1} \vec{a} \quad c_2 \neq 0 \text{ ならば } \vec{a} = -\frac{c_1}{c_2} \vec{b}$$

となります。このとき $\vec{a} \parallel \vec{b}$ と記して、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行であると呼びます。

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0}, \quad 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

なので

$$\vec{0} \parallel \vec{b}, \quad \vec{a} \parallel \vec{0}$$

であることが分かります。従って

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ は 1 次独立} \Rightarrow \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

であることが分かります。

$\vec{a}, \vec{b}$ は 1 次独立であるとし、このとき $\vec{a} \neq \vec{0}$ 従って $L(\vec{a}) \neq \{\vec{0}\}$ が成立します。もし $\vec{b} \in L(\vec{a})$ ならば、ある $\lambda \in \mathbf{K}$ に対して

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} \quad \text{すなわち} \quad \lambda \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

となるので $\vec{a}, \vec{b}$ が 1 次独立であることに反します。従って $\vec{b} \notin L(\vec{a})$ が成立します。

逆に $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \notin L(\vec{a})$ とします。

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} = \vec{0}$$

とします。もし $c_2 \neq 0$ ならば $\vec{b} = -\frac{c_1}{c_2} \vec{a} \in L(\vec{a})$ となり仮定に反します。従って $c_2 = 0$ であることが分かります。このとき $c_1 \vec{a} = \vec{0}$ かつ $\vec{a} \neq \vec{0}$ となるので、 $c_1 = 0$ が従います。

以上で

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ は 1 次独立} \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \notin L(\vec{a})$$

が示せました。次に掃き出し法の観点から考えると以下が示せます。

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ は 1 次独立} \Leftrightarrow (\vec{a} \ \vec{b}) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2) \text{ と行基本変形可能}$$

($\Leftarrow$) 一般に $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_\ell \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$(\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_\ell) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{y}_1 \ \cdots \ \vec{y}_\ell) \text{ と行基本変形可能}$$

ならば

$$c_1 \vec{x}_1 + \cdots + c_\ell \vec{x}_\ell = \vec{0} \Leftrightarrow c_1 \vec{y}_1 + \cdots + c_\ell \vec{y}_\ell = \vec{0}$$

が成立することから導けます。

($\Rightarrow$) $\vec{a} \neq \vec{0}$ なので定理 1.4 を用いると

$$(\vec{a} \ \vec{b}) \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \beta_m \end{pmatrix}$$

と行基本変形できます。もし $\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \vec{0}$ とすると

$$-\beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{から} \quad -\beta_1 \cdot \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$$

となり $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ であることに反します. よって $\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ であることが分かります. そこで

$$\beta_2 = \cdots = \beta_{k-1} = 0, \quad \beta_k \neq 0$$

であるとして.

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \beta_m \end{pmatrix} \xrightarrow{2r \leftrightarrow kr} \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_k \\ 0 & \gamma_3 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \gamma_m \end{pmatrix} \xrightarrow{2r*=\frac{1}{\beta_k}} \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ 0 & 1 \\ 0 & \gamma_3 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \gamma_m \end{pmatrix} \xrightarrow{jr*=(-\gamma_j) \times 2r \ (j \neq k)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2)$$

と行基本変形できます.

以上をまとめると次の定理 1.5 となります.

定理 1.5. $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}$ とします. このとき

$$\begin{aligned} \vec{a}, \vec{b} \text{ は 1 次独立} &\Leftrightarrow (\text{定義}) c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \notin L(\vec{a}) \\ &\Leftrightarrow (\vec{a} \ \vec{b}) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2) \text{ と行基本変形可能} \end{aligned}$$

$n = 3$ のとき 以下, 1 次独立は長いので LI と略記します. 1 次従属は LD とします.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は LI} \xLeftrightarrow{\text{定義}} (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow x = y = z = 0)$$

と定義します. $n = 2$ のとき, すなわち 2 本のベクトルのときと同様に議論を進めていきます.

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}, \quad 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}, \quad 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

から

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は LI} \Rightarrow \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$$

が従います. 次に

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は LI} \Rightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b}, \vec{a} \nparallel \vec{c}, \vec{b} \nparallel \vec{c}$$

を示します. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を示します. $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ とすると

$$x\vec{a} + y\vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

となり, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が LI のとき $x = y = 0 = 0$ が従います. 他の $\vec{a} \nparallel \vec{c}$ と $\vec{b} \nparallel \vec{c}$ も同様に示せます.

注意 1.1. この逆は一般には成立しません. 次の演習 1.1 を考えてみましょう.

演習 1.2. $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^m$ は $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を満すとして. このとき $\vec{c} := -\vec{a} - \vec{b}$ と定めると

$$\vec{a} \nparallel \vec{c}, \vec{b} \nparallel \vec{c}$$

が成立することを示しましょう. さらに $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が LD であることを示しましょう.

次に $\vec{a}, \vec{b}$ が生成する部分空間

$$L(\vec{a}, \vec{b}) := \{x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbf{K}^m; x, y \in \mathbf{K}\}$$

を用いて 1 次独立性を記述していきます。

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は LI} \Rightarrow \vec{c} \notin L(\vec{a}, \vec{b})$$

実際、 $\vec{c} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ とすると $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ と表されますから、 $x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ となり $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は LD となってしまいます。

以上で

定理 1.6.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は LI} \Rightarrow \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \notin L(\vec{a}), \vec{c} \notin L(\vec{a}, \vec{b})$$

を示しました。 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ならば $\vec{b} \notin L(\vec{a})$ が成立することに注意しましょう。次に定理 1.6 の逆が成立することを示します。

定理 1.7.

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \notin L(\vec{a}), \vec{c} \notin L(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は LI}$$

これを証明してみましょう。 $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ とします。もし $z \neq 0$ ならば

$$\vec{c} = -\frac{x}{z}\vec{a} - \frac{y}{z}\vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b})$$

となってしまいます。よって $z=0$ であることが分かります。このとき $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ となりますが、 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{a} \notin L(\vec{a})$ から $\vec{a} \parallel \vec{b}$ となり、 $x=y=0$ が従います。

次に掃き出し法の観点から考えていきます。

定理 1.8. $m \geq 3$ のとき

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は LI} \Leftrightarrow (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) \text{ と行基本変形可能}$$

($\Leftarrow$)

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \vec{0}$$

となることから $x = y = z = 0$ が導けます。

($\Rightarrow$) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ から

$$(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \gamma_m \end{pmatrix}$$

と行基本変形できます。ここでもし $\begin{pmatrix} \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} = \vec{0}$ が成立すると $-\gamma_1\vec{e}_1 - \gamma_2\vec{e}_2 + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ から

$$-\gamma_1\vec{a} - \gamma_2\vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

が従います。これは $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が LI であることに反します。よって $\begin{pmatrix} \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ であることが分かります。ここで

$$\gamma_3 = \cdots = \gamma_{k-1} = 0, \quad \gamma_k \neq 0$$

とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \gamma_m \end{pmatrix} \xrightarrow{3r \leftrightarrow kr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta_1 \\ 0 & 1 & \delta_2 \\ 0 & 0 & \gamma_k \\ 0 & 0 & \delta_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \delta_m \end{pmatrix} \xrightarrow{3r * = \frac{1}{\gamma_k}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta_1 \\ 0 & 1 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \delta_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \delta_m \end{pmatrix} \xrightarrow{ir + = (-\delta_j) \times 3r \ (j \neq 3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できます.

以上をまとめると次の定理 1.9 を示したことになります.

定理 1.9.

$$\begin{aligned} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は LI} &\Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \notin L(\vec{a}), \vec{c} \notin L(\vec{a}, \vec{b}) \\ &\Leftrightarrow (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) \text{ と行基本変形可能} \end{aligned}$$

(L04 の講義後追記) 定理 1.8 において前提条件 $m \geq 3$ を追加しましたが. 例えば $m = 2$ ならばどうなるか考えます.

定理 1.10. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{K}^2$ は LD となります.

(証明) $\vec{a}, \vec{b}$ が LD の場合と LI の場合に分けて考えます.

$\vec{a}, \vec{b}$ が LD の場合 $x \neq 0$ または $y \neq 0$ を満たす $x, y \in \mathbf{K}$ が存在して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \quad \text{従って} \quad x\vec{a} + y\vec{b} + 0\vec{c} = \vec{0}$$

が成立します. これは $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が LD であることを意味します.

$\vec{a}, \vec{b}$ が LI の場合 定理 1.5 によると

$$(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できます. これから

$$-\gamma_1\vec{a} - \gamma_2\vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

が成立することが分かります. よって $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が LD であることが分かります.

一般の場合 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \text{ は LI} \xLeftrightarrow{\text{定義}} (c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_n\vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0)$$

と定義したことを思い出しましょう. $n = 3$ すなわちベクトルの本数が 3 本の場合と同様にこの定義を言い換えていきます.

定理 1.11. $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n \text{ は LI} \Rightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1} \text{ は LI}$$

これを証明しましょう. $c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_{n-1}\vec{a}_{n-1} = \vec{0}$ とすると

$$c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_{n-1}\vec{a}_{n-1} + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

から $c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0 = 0$ から $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}$ が LI であることが分かります.

定理 1.12. $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n \text{ は LI} \Leftrightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1} \text{ は LI, } \vec{a}_n \notin L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$$

($\Rightarrow$) 定理 1.11 を考慮に入れると $\vec{a}_n \notin L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$ を示せば十分であることが分かります。
 $\vec{a}_n \in L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$ とすると

$$\vec{a}_n = c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_{n-1} \vec{a}_{n-1} \quad \text{すなわち} \quad c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_{n-1} \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n = \vec{0}$$

これは $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n$ が LD であることを意味します。

($\Leftarrow$) $c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_{n-1} \vec{a}_{n-1} + c_n \vec{a}_n = \vec{0}$ とします。もし $c_n \neq 0$ とすると

$$\vec{a}_n = -\frac{c_1}{c_n} \vec{a}_1 - \dots - \frac{c_{n-1}}{c_n} \vec{a}_{n-1} \in L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$$

となりますから、 $c_n = 0$ であることが分かります。このとき

$$c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_{n-1} \vec{a}_{n-1} = \vec{0}$$

となりますが、 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}$ が LI なので $c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ が従います。

定理 1.13. $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^m$ に対して

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n$ は LI, $m \geq n \Rightarrow (\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_n) \rightarrow \dots \rightarrow (\vec{e}_1 \ \dots \ \vec{e}_n)$ と行基本変形できます

(証明) n に関する帰納法を用います。すると

$$(\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_{n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow (\vec{e}_1 \ \dots \ \vec{e}_{n-1})$$

と行基本変形できます。このとき同じ行基本変形を用いて

$$(\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_{n-1} \ \vec{a}_n) \rightarrow \dots \rightarrow (\vec{e}_1 \ \dots \ \vec{e}_{n-1} \ \vec{\beta})$$

と行基本変形できたとします。 $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ として $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ となります (なぜか考えましょう)。

このとき $\begin{pmatrix} \beta_n \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_k \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$, $\beta_k \neq 0$ できます。このことを用いて

$$\begin{aligned} (\vec{e}_1 \ \dots \ \vec{e}_{n-1} \ \vec{\beta}) &\xrightarrow{nr \leftrightarrow kr} \begin{pmatrix} 1 & & \beta_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \ \beta_{n-1} \\ & & \beta_k \\ & & * \\ & & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{nr \times = \frac{1}{\beta_k}} \begin{pmatrix} 1 & & \beta_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \ \beta_{n-1} \\ & & 1 \\ & & * \\ & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \gamma_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \ \gamma_{n-1} \\ & & 1 \\ & & \gamma_{n+1} \\ & & \vdots \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{j r + = n r \times (-\gamma_j) \ (j \neq n)} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \ 0 \\ & & 1 \\ & & 0 \\ & & \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と行基本変形できます。

定理 1.14. $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n \text{ は } LI \Rightarrow m \geq n$$

(証明) $m < n$ として矛盾を導きます.

(i) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ が LI であるとします. このとき定理 1.13 から

$$(\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_m \ \vec{a}_{m+1}) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{e}_1 \ \cdots \ \vec{e}_m \ \vec{\beta})$$

と行基本変形できますが, これは $\vec{\beta} = \beta_1 \vec{e}_1 + \cdots + \beta_m \vec{e}_m$ から

$$\beta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \beta_m \vec{a}_m - \vec{a}_{m+1} = \vec{0}$$

となりますから, $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m, \dots, \vec{a}_n$ が LD となってしまいます.

(ii) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ が LD であるとします. このときある $c_j \neq 0$ が存在して

$$c_1 \vec{a}_1 + \cdots + c_j \vec{a}_j + \cdots + c_m \vec{a}_m = \vec{0}$$

となります. これは

$$c_1 \vec{a}_1 + \cdots + c_j \vec{a}_j + \cdots + c_m \vec{a}_m + 0 \cdot \vec{a}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

から $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m, \dots, \vec{a}_n$ が LD となってしまいます.

以上の定理 1.14 の証明から次の定理 1.15 が証明されています.

定理 1.15. $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$m < n \Rightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n \text{ は } LD$$

注意 実はこの定理 1.15 は部分空間の次元を定義する上で必須のものです.

最後に次の定理 1.16 でまとめます.

定理 1.16. $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \text{ が } LI \Leftrightarrow m \geq n, (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{e}_1 \ \cdots \ \vec{e}_n) \text{ と行基本変形できます}$$