# 連立1次方程式の行基本変形（まとめ）



$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{K}^m$ とします.

$$\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

と成分を表示します. このとき

$$x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\#) \begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_j a_{1j} + \cdots + x_n a_{1n} = \beta_1 \\ \quad \vdots \\ x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + \cdots + x_j a_{ij} + \cdots + x_n a_{in} = \beta_i \\ \quad \vdots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \cdots + x_{m} j + \cdots + x_n a_{mn} = \beta_m \end{cases}$$

となる. たとえば $m=3$ $n=4$ とし

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

とするとき

$$(*) \begin{cases} 2y + 3z - w = 2 \\ x - y + 2z + 3w = 3 \\ -3x + 5y - z + w = -5 \end{cases}$$

が 対応する連立1次方程式となる. この方程式の拡大行列は

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4 \mid \vec{\beta}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

となります.

拡大行列を行基本変形したとします。

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n \mid \vec{\beta}) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n \mid \vec{\gamma})$$

このとき連立1次方程式の基本変形と行基本変形の対応を考えると

$$x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n = \vec{\beta} \iff x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n = \vec{\gamma}$$

となります。Gaussの掃き出し法アルゴリズムを用いると狭義の階段行列に変形でき、それを用いると解すべてを表現できます。

例1の場合

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4 \mid \vec{\beta}) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 45/4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 13/4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 & 2 \end{array}\right)$$

から

$$(*) \iff \begin{cases} x \qquad\quad + \frac{45}{4} w = -3 \\ \quad y \qquad + \frac{13}{4} w = -2 \\ \qquad\quad z - \frac{5}{2} w = 2 \end{cases}$$

となるので Pivotのない変数wをtとおいて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{45}{4} t - 3 \\ -\frac{13}{4} t - 2 \\ t \\ \frac{5}{2} t + 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{45}{4} \\ -\frac{13}{4} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が解全体を表現します(ここでtは任意定数です)

問 上の行基本変形をアルゴリズム通りに求めよ。

行列

$$A=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n)$$

を方程式の係数行列と呼びます。n列の行列Aに対して

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

と定義します。

$\vec{b}=\vec{0}$ のとき $\boxed{A\vec{x}=\vec{0}}$ を A が定める斉次方程式と呼びます。

拡大行列は $(A \mid \vec{0}) = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n \mid \vec{0})$ となりますが

$$\vec{0} \longrightarrow \vec{0}$$

が任意の行基本変形で成立するので A を行基本変形するだけで十分です。

④



# 第5章　行列の演算について

## 5.1　ベクトルの演算の性質（復習）

ベクトルの足し算とスカラー倍に関する基本的な定理 5.1 を述べましょう.

**定理 5.1.** **(1)** $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{5.1}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \tag{5.2}$$

が成立します.
**(2)** $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbf{K}^n$ と $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ に対して

$$\lambda\,(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a} \tag{5.3}$$

$$(\lambda+\mu)\,\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a} \tag{5.4}$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b} \tag{5.5}$$

が成立します.

## 5.2　行列の和・差とスカラー倍

同じ型を持つ，すなわち同じ行数，列数を持つ行列の間には足し算（加法）と引き算（減法）が定義されます. $m \times n$ 行列，すなわち $m$ 行 $n$ 列の行列

$$A=(\vec{a}_1\cdots\vec{a}_j\cdots\vec{a}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}=(a_{ij}),\ B=(\vec{b}_1\cdots\vec{b}_j\cdots\vec{b}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}=(b_{ij})$$

# ベクトルの1次独立性

$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^m$ とします。

$$c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_n\vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$$

が成立するとき $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ は1次独立と呼びます。

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0}$$

と行列の積を用いて表現できます。1次独立でないとき、$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ は1次従属と呼びます。

$$\exists \vec{c} \neq \vec{0} \text{ に対して } (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)\vec{c} = \vec{0}$$

がその条件です。$n$ が小さいとき詳しく見ていきます。

## $n=1$

**定理** $\vec{a} \in \mathbb{K}^m$ に対して $\left(\forall c \in \mathbb{K} \quad c\vec{a} = \vec{0}\right) \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

問 ($\Rightarrow$) を示しましょう。

この定理を用いると

$$\vec{a} \text{ は1次独立} \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \Leftrightarrow L(\vec{a}) \supsetneq \{\vec{0}\}$$

$$\vec{a} \text{ は1次従属} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow L(\vec{a}) = \{\vec{0}\}$$

が分かります。ここで

$$L(\vec{a}) = \{\lambda\vec{a} \in \mathbb{K}^m ; \lambda \in \mathbb{K}\}$$

としています。

n=2のとき. $\vec{a},\vec{b}\in \mathbb{K}^m$ とします.

$$\vec{a},\vec{b}\text{ は1次独立} \Leftrightarrow \left(c_1\vec{a}+c_2\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow c_1=c_2=0\right)$$

$$\vec{a},\vec{b}\text{ は1次従属} \Leftrightarrow (c_1\neq 0 \text{ OR } c_2\neq 0)\text{ かつ } c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2=\vec{0}$$

が定義です. $\vec{a},\vec{b}$ は1次従属とします. $c_1\vec{a}+c_2\vec{b}=\vec{0}$ とします.

$c_1\neq 0$ のとき $\quad \vec{a}=-\dfrac{c_2}{c_1}\vec{b}$

$c_2\neq 0$ のとき $\quad \vec{b}=-\dfrac{c_1}{c_2}\vec{a}$

となります. このとき $\vec{a}\parallel\vec{b}$ ($\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行) と言います

$$1\cdot\vec{0}+0\cdot\vec{b}=\vec{0},\quad 0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{0}=\vec{0}$$

なので

$$\vec{0}\parallel\vec{a},\quad \vec{a}\parallel\vec{0}$$

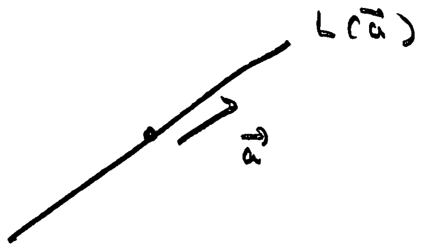
が成立します. このことから

$$\vec{a},\vec{b}\text{ は1次独立} \Rightarrow \vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}.$$

が分かります.

$\vec{a},\vec{b}$ が1次独立とします. このとき $\vec{a}\neq\vec{0}$ 従って $L(\vec{a})\neq\{\vec{0}\}$

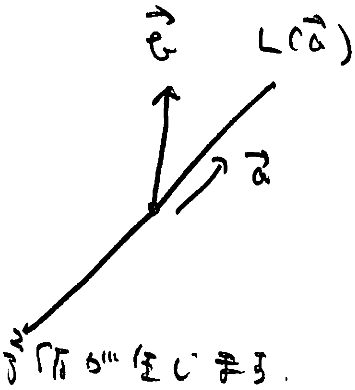
が成立します. $\vec{b}\in L(\vec{a})$ とすると




$$\vec{b}=\lambda\vec{a}\quad \text{i.e.}\quad \lambda\vec{a}+(-1)\vec{b}=\vec{0}$$

となり $\vec{a},\vec{b}$ が1次独立であることに反します.

従って $\vec{b}\notin L(\vec{a})$




$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\notin L(\vec{a})$ とします.

$$c_1\vec{a}+c_2\vec{b}=\vec{0}$$

とします. $c_2\neq 0$ とすると $\vec{b}=-\dfrac{c_1}{c_2}\vec{a}\in L(\vec{a})$ となり矛盾が生じます.

よって $c_2=0$. ゆえに $c_1\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$ から $c_1=0$

以上で $\boxed{\vec{a}, \vec{b} \text{ は1次独立} \iff \vec{a} \neq \vec{0} \text{ かつ } \vec{b} \notin L(\vec{a})}$

が示せました。次に以下を示します。

$\vec{a}, \vec{b}$ は1次独立 $\iff (\vec{a}\ \vec{b}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と行基本変形できる

(⟸) は明らかになっています。

(⟹) (掃き出し法が分かっているとこれもほぼ明らか)

$\vec{a} \neq \vec{0}$ なので $*_0 \neq 0$

$$i \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \\ *_0 & \\ \vdots & \end{pmatrix} \xrightarrow{1行 \leftrightarrow i行} \begin{pmatrix} *_0 & \\ \#_2 & \\ \vdots & \\ \#_n & \end{pmatrix} \xrightarrow[1行 \times \frac{1}{*_0}]{} \begin{pmatrix} 1 & \\ \#_2 & \\ \vdots & \\ \#_m & \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{j=2,\ldots,m \\ に対して \\ j行 += 1行 \times (-\#_j)}]{} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}$$

ここで $\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ であることが分かります。もし $\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \vec{0}$ とすると

$-\beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ から $-\beta_1 \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ となりますが

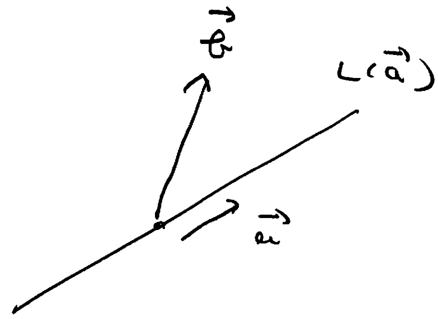
$\vec{a} \parallel \vec{b}$ に反します。$\beta_k \neq 0$ として

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 \\ \vdots & \beta_k \\ 0 & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow[2行 \leftrightarrow \beta_k]{} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & \beta_k \\ \vdots & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \xrightarrow{2行 \times \frac{1}{\beta_k}} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & 1 \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

まとめ（2本）

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立 $\overset{\text{定義}}{\iff} \left(c_1\vec{a}+c_2\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow c_1=c_2=0\right)$

$\iff \vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{b}\notin L(\vec{a})$ $\iff$ $(\vec{a}\ \vec{b})\to\cdots\to(\vec{e}_1\ \vec{e}_2)$ と行基本変形ができる.




以下 1次独立は長いので LI と記します.

n=3 のとき. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は LI $\iff \left(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{d}=\vec{0} \Rightarrow x=y=z=0\right)$

まず

$$\boxed{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ が LI} \Rightarrow \vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{c}\neq\vec{0}}$$

を示します.

$1\cdot\vec{0}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}=\vec{0}$, $0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{0}+0\cdot\vec{c}=\vec{0}$,

$0\vec{a}+0\vec{b}+1\cdot\vec{0}=\vec{0}$

から分かります. 次に

$$\boxed{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ が LI} \Rightarrow \vec{a}\nparallel\vec{b},\ \vec{a}\nparallel\vec{c},\ \vec{b}\nparallel\vec{c}}$$

を示します. $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ を示します.

$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ とすると $x\vec{a}+y\vec{b}+0\vec{c}=\vec{0}$

から $x=y=0=0$.

他も同様

$$\boxed{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ が LI} \Rightarrow \vec{c}\notin L(\vec{a},\vec{b})}$$

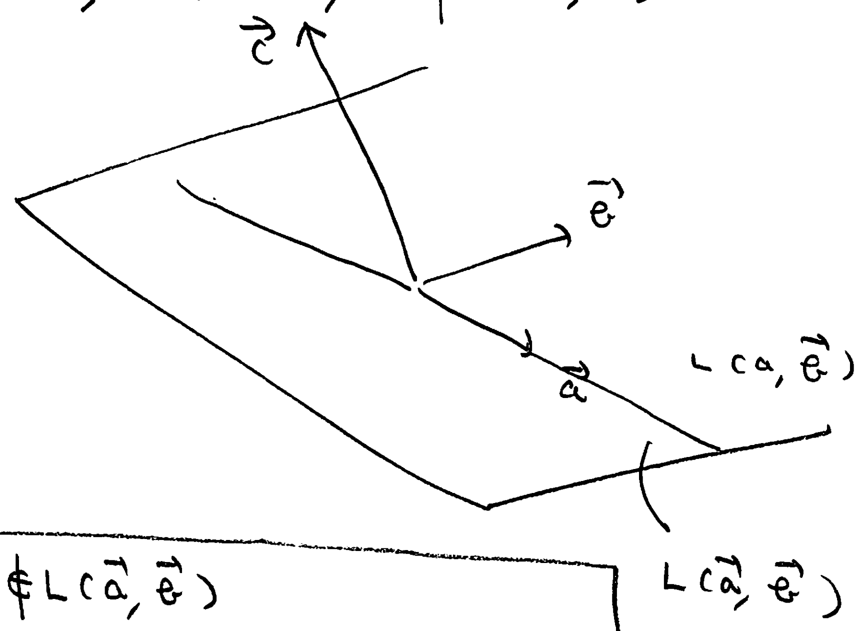
$\vec{c}\in L(\vec{a},\vec{b})$ とすると $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ 従って $x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$

から $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が LD となります.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ がLI ⇒ $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\notin L(\vec{a})$, $\vec{c}\notin L(\vec{a},\vec{b})$

が示されました

逆も成立します.




$$\boxed{\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\notin L(\vec{a}),\ \vec{c}\notin L(\vec{a},\vec{b}) \Rightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{ は LI}}$$

$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ とします. $z\neq 0$ とすると

$$\vec{c}=-\frac{x}{z}\vec{a}-\frac{y}{z}\vec{b}\in L(\vec{a},\vec{b})$$

となるので $\boxed{z=0}$. $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\notin L(\vec{a})$ から $\vec{a}\nparallel\vec{b}$

$x\vec{a}+y\vec{b}+0\vec{c}=\vec{0}$ から $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$. このとき

$\boxed{x=y=0}$ が従います.

$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ の行基本変形については以下が成立します.

$$\boxed{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{ は LI} \iff (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\to\cdots\to(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\text{ と行基本変形できます}}$$

(⟸) は $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0} \iff x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3=\vec{0}$

から明らかです.

(⟹) $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ から

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&\gamma_1\\0&1&\gamma_2\\0&0&\gamma_3\\\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\gamma_m\end{pmatrix}$$

と行基本変形できます.

$\begin{pmatrix} r_3 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} = \vec{0}$ とすると $\quad -r_1\vec{e}_1 - r_2\vec{e}_2 + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

から $\vec{c} = r_1\vec{a} + r_2\vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ となるので $\begin{pmatrix} r_3 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

$\begin{pmatrix} r_3 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_k \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$, $r_k \neq 0$ とします.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & r_2 \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & r_k \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \xrightarrow[1r \Leftrightarrow 3r]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & r_2 \\ 0 & 0 & r_k \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \xrightarrow{3r \times \frac{1}{r_k}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以上で次を示しました.

**定理** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は LI $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \notin L(\vec{a})$, $\vec{c} \notin L(\vec{a}, \vec{b})$

$\Leftrightarrow$ $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ と行基本変形できる.

**n:一般の場合.** $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^m$ に対して

$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ は LI $\underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0)$

**命題 1** $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^m$ が LI ならば $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{n-1}$ は LI.

**問** これを示せ. $n=3$ のとき復習すれば分ります.

命題2　$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^m$ に対して

$$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \text{ は LI} \iff \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{n-1} \text{ は LI},\ \vec{a}_n \notin L(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{n-1})$$

($\Rightarrow$)　$\vec{a}_n \notin L(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{n-1})$ を示せばよい。$\vec{a}_n \in L(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{n-1})$ とすると $\vec{a}_n = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_{n-1}\vec{a}_{n-1}$ と書けますから、$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ はLDとなってしまいます。

($\Leftarrow$)　$x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$ とします。$x_n \neq 0$ とすると

$$\vec{a}_n = -\frac{x_1}{x_n}\vec{a}_1 - \cdots - \frac{x_{n-1}}{x_n}\vec{a}_{n-1} \in L(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{n-1})$$

となるので $\boxed{x_n = 0}$ であることが分かります。$x_n = 0$ とすると

$$x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_{n-1}\vec{a}_{n-1} = \vec{0}$$

$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{n-1}$ がLIなので $\boxed{x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0}$ も分かります。

命題3　$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^m$ に対して

$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ は LI, $m \geq n \Rightarrow (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)$

と行基本変形できる。

$n$ に関する帰納法で示します。

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_{n-1}) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_{n-1})$$

と行基本変形できたとします。このとき

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_{n-1}\ \vec{a}_n) \longrightarrow \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_{n-1}\ \vec{\beta})$$

となるとします。$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ として $\overbrace{\begin{pmatrix} \beta_n \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ とします.}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_k \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$, $\beta_k \neq 0$

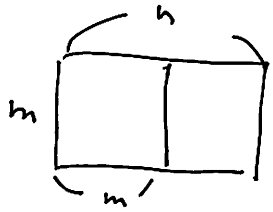
とします。

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_n \\ & & & \vdots \\ & & & \beta_m \end{pmatrix} \xrightarrow{kr \leftrightarrow nn} \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_k \\ & & & * \\ & & & \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \beta_{n-1} \\ & & & 1 \\ & & & * \\ & & & \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できます。

**命題4** $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^m$ がLI $\Rightarrow$ $m \geqq n$.

$m > n$ とします。



(i) $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m$ がLIとします。

$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_m\ \vec{a}_{m+1}) \to \cdots (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_m\ \vec{\beta})$ とします。

このとき $\vec{\beta} = \beta_1 \vec{e}_1 + \cdots + \beta_m \vec{e}_m$ から

$$\beta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \beta_m \vec{a}_m - \vec{a}_{m+1} = \vec{0}$$

から $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m, \cdots, \vec{a}_n$ はLDであることが分かります。

(ii) $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m$ がLDならば $\exists c_j \neq 0$ $(1 \leqq j \leqq m)$ で

$$\vec{0} = c_1 \vec{a}_1 + \cdots + c_j \vec{a}_j + \cdots + c_m \vec{a}_m$$
$$= c_1 \vec{a}_1 + \cdots + c_j \vec{a}_j + \cdots + c_m \vec{a}_m + 0 \vec{a}_{m+1} + \cdots + 0 \vec{a}_n$$

から $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m, \cdots, \vec{a}_n$ はLDとなります。

**定理** $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^m$ がLI $\Leftrightarrow$ $m \geqq n$, $(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)$ と行基本変形できます。

**注意** 命題4の証明から $n > m$ ならば $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^m$ はLD.

であることが示されていますが、これが本当は重要です!!