行列の正則性　L05-0703

$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して

$$\boxed{A:\text{正則} \iff \left(A\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}\right) \iff \left(\begin{array}{l} A\to\cdots\to I_n \text{ と} \\ \text{行基本変形可能} \end{array}\right)}$$

であることを示してある.

$$\begin{aligned}
A:\text{正則} &\overset{\text{定義}}{\iff} \text{(i)}\ \exists X\in M_n(\mathbb{K})\quad AX=XA=I_n \\
&\iff \text{(ii)}\ \exists X\in M_n(\mathbb{K})\quad AX=I_n \\
&\iff \text{(iii)}\ \exists X\in M_n(\mathbb{K})\quad XA=I_n
\end{aligned}$$

が成立する. (i) $\Rightarrow$ (ii), (i) $\Rightarrow$ (iii) は明らかなので (ii) $\Rightarrow$ (i), (iii) $\Rightarrow$ (i) を示す.

(iii) $\Rightarrow$ (i)　$A\vec{v}=\vec{0}$ とすると $XA\vec{v}=X\vec{0}=\vec{0}$, $XA\vec{v}=I_n\vec{v}=\vec{v}$ から $\vec{v}=\vec{0}$. $(A\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}) \rightsquigarrow A:\text{正則}$ となる.

(ii) $\Rightarrow$ (i)　(iii) $\Rightarrow$ (i) を示してあるので $XA=I_n$ から X は正則である. $XA=I_n \xrightarrow[X^{-1}\cdot]{} A=X^{-1}$ であるが,

$$\boxed{P\ \text{正則} \Rightarrow P^{-1}\ \text{正則}}$$

を用いると A が正則であることが従う.

$n=2$ のとき.

$$A:\text{正則} \iff \left(A\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}\right) \iff |A| \neq 0$$

を示してある.

$n=3$ のとき,

$$\begin{tikzcd}
A\ \text{正則} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[rr, bend right, "|AA^{-1}|=|I_3|=1"'] & \left(A\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}\right) & \boxed{|A|\neq 0} \arrow[l, bend right, "\text{クラメール}"'] \arrow[ll, bend right, "\Leftarrow\ \text{余因子行列}"']
\end{tikzcd}$$

示すには

$$\left(A\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}\right) \Rightarrow |A| \neq 0$$

である。対偶

$$\boxed{|A|=0 \Rightarrow \exists \vec{v} \neq \vec{0} \ (A\vec{v}=\vec{0})}$$

を示す。

(余因子行列の公式) $A\tilde{A} = |A| I_3 = O_3$ となる。

- $\tilde{A} = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) \neq O_3$ のとき $\vec{p} \neq \vec{0}$ or $\vec{q} \neq \vec{0}$ or $\vec{r} \neq \vec{0}$.
- $\tilde{A} = O_3$ のとき。 $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$, $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_3$, $\vec{a}_2 \parallel \vec{a}_3$ となる。

注 $\vec{a} \nparallel \vec{b} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = 0 \quad (\forall i, \forall j)$ を用いる。

($n=2$ の定理を用いる。) $\boxed{\begin{array}{l} B \in M_2(\mathbb{K}) \text{ が } |B| = \vec{0} \text{ のとき} \\ \exists \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad B\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \end{array}}$

$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ とする。

- $\vec{a}_1 = \vec{0}$ のとき $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$
- $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ のとき $A \to \cdots \to \left(\begin{array}{c|c} 1 & *_1\ *_2 \\ \hline 0 & \\ 0 & B \end{array}\right)$ と行基本変形できるが

$$0 = |A| = \pm |B|$$

から $\exists \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ $B\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ が分かる。

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} x + *_1 y + *_2 z = 0 \\ B\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \end{cases}$$

$$x = -*_1 y - *_2 z.$$

とすればよい。

次元について (L05-0703)

L03の小テストの補足説明において

$$(\vec a\ \vec b\ \vec c \mid \vec p\ \vec q\ \vec r) \to \cdots \to \left(\vec e_1\ \vec e_2\ \vec e_3 \,\middle|\, \begin{matrix}1&1&1\\1&-2&-3\\1&-1&-2\\0&0&0\end{matrix}\right) \to \cdots \to \left(\begin{matrix} * \\ 0\ 0\ 0\end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix}\right)$$

前半の行基本変形から (i) $(\vec p\ \vec q\ \vec r) = (\vec a\ \vec b\ \vec c)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&-3\\1&-1&-2\end{pmatrix}$ 従って

$\vec p,\vec q,\vec r \in L(\vec a,\vec b,\vec c)$ さらに $L(\vec p,\vec q,\vec r)\subset L(\vec a,\vec b,\vec c)$

(ii) $\vec a,\vec b,\vec c$ はLI.

後半の行基本変形から (iii) $\vec p,\vec q,\vec r$ はLI

が示せます.

$L(\vec p,\vec q,\vec r) \subsetneqq L(\vec a,\vec b,\vec c)$ とすると $\exists \vec s\in L(\vec a,\vec b,\vec c)$

$$\vec s\notin L(\vec p,\vec q,\vec r)$$

このとき $\vec p,\vec q,\vec r,\vec s$ はLIとなります ← 示せるか.

$$(\vec p\ \vec q\ \vec r\ \vec s)\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\\\alpha\end{pmatrix} = (\vec a\ \vec b\ \vec c)\, T \begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\\\alpha\end{pmatrix}$$

と3行4列の $T = \begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\y_1&y_2&y_3&y_4\\z_1&z_2&z_3&z_4\end{pmatrix}$ で表現できますが

$\exists \begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\\\alpha\end{pmatrix} \ne \vec 0$ $\quad T\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\\\alpha\end{pmatrix} = \vec 0$ が従います.(次の定理)

これを用いると $\vec p,\vec q,\vec r,\vec s$ はLDとなり矛盾が生じます. $\subsetneqq$ は"$=$"となる.

定理 T: m行n列の行列 ($T\in M_{m,n}(\mathbb{K})$)

$m<n$ のとき $T\vec v = 0,\ \vec v\ne\vec 0$ である自明解 $\vec v\in\mathbb{K}^n$ が存在する

示せるかな?

(続きは「線形独立性・基底・次元」

$$L(\vec{p},\vec{q},\vec{r}) = L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

を証明しました．実は $L(\vec{p},\vec{q},\vec{r}) \subset L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ を示した後で別の論法によって $L(\vec{p},\vec{q},\vec{r}) = L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ を示すことができます．

$$L(\vec{p},\vec{q},\vec{r}) \subsetneq L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

とします．このとき $\exists \vec{s} \in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ が $\vec{s} \notin L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$ を満たします．この状況で $\vec{p},\vec{q},\vec{r},\vec{s}$ は LI となります．実際

$$c_1\vec{p} + c_2\vec{q} + c_3\vec{r} + c_4\vec{s} = \vec{0}$$

とします．ここで $c_4 \neq 0$ とすると

$$\vec{s} = -\frac{1}{c_4}(c_1\vec{p} + c_2\vec{q} + c_3\vec{r}) \in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

となってしまい矛盾が生じます．よって $c_4 = 0$ であることが分かります．このとき

$$c_1\vec{p} + c_2\vec{q} + c_3\vec{r} = \vec{0}$$

となりますが，$\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ は LI ですから $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ が従うからです．(以上で背理法の仮定の下で $\vec{p},\vec{q},\vec{r},\vec{s}$ が LI となることを導きました．) これから以下のように矛盾が導けます．$\vec{p},\vec{q},\vec{r},\vec{s} \in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ なので

$$(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}\ \vec{s}) = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

と表現できます．右辺に出てくる 3 行 4 列の $D := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ は各列が $\vec{p},\vec{q},\vec{r},\vec{s}$ それぞれの座標となります（座標については後に説明します）．D が定める斉次方程式には非自明な解 $\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在します：

$$D \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

(1) の両辺に右からこの非自明解を掛けると

$$(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}\ \vec{s}) \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) D \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{0} = \vec{0}$$

から $\vec{p},\vec{q},\vec{r},\vec{s}$ が LD であることになり矛盾が生じます．以上で背理法の仮定が否定されて $L(\vec{p},\vec{q},\vec{r}) = L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ となることが証明されました．

一般に ・$\vec{p},\vec{q},\vec{r},\vec{s} \in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ は LD であることが示せます．

・$\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n \in L(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_m)$ は $n>m$ のとき LD.

も同様に示せます．