

I $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V^\perp$ である。 $\forall \vec{v} \in V$ である。

$$(\vec{w}_j, \vec{v}) = 0 \quad (j=1, 2)$$

だから $\vec{w}_j$ は $V^\perp$ の元である。

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2, \vec{v}) &= \lambda (\vec{w}_1, \vec{v}) + \mu (\vec{w}_2, \vec{v}) \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

よって $\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 \in V^\perp$ である。

II $V_1 + V_2$ $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V_1 + V_2$ である。

$$\vec{w}_1 = \vec{p}_1 + \vec{q}_1, \quad \vec{p}_1 \in V_1, \vec{q}_1 \in V_2$$

$$\vec{w}_2 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2, \quad \vec{p}_2 \in V_1, \vec{q}_2 \in V_2$$

と表すことができる。

$$\begin{aligned} \lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 &= \lambda (\vec{p}_1 + \vec{q}_1) + \mu (\vec{p}_2 + \vec{q}_2) \\ &= (\lambda \vec{p}_1 + \mu \vec{p}_2) + (\lambda \vec{q}_1 + \mu \vec{q}_2) \end{aligned}$$

よって $\lambda \vec{p}_1 + \mu \vec{p}_2 \in V_1, \lambda \vec{q}_1 + \mu \vec{q}_2 \in V_2$ である。

$$\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 \in V_1 + V_2$$

だから $V_1 + V_2$ は V の部分空間である。

$V_1 \cap V_2$ $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V_1 \cap V_2$ である。 $\vec{w}_1 \in V_1$ かつ $\vec{w}_1 \in V_2$

$\vec{w}_2 \in V_1$ かつ $\vec{w}_2 \in V_2$ である。

$$\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 \in V_1, \quad \lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 \in V_2$$

よって $\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 \in V_1 \cap V_2$ である。

III

2

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in L(\vec{a}, \vec{b})^\perp$$

$$\Leftrightarrow (\vec{x}, s\vec{a} + t\vec{b}) = 0 \quad (\forall s, \forall t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{a}) = (\vec{x}, \vec{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow t\vec{b} \cdot \vec{x} = t\vec{b} \cdot \vec{0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} t\vec{a} \\ t\vec{b} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0 \quad (*)$$

とすると $(*)$ 2: $\Rightarrow$ 1: $s=1, t=0$ と $s=0, t=1$ かつ $\vec{x} \in L$ 1: $\Leftrightarrow$

$$(\vec{x}, s\vec{a} + t\vec{b}) = s(\vec{x}, \vec{a}) + t(\vec{x}, \vec{b}) = s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0$$

1: $\Rightarrow$ 2:

$$(*) \quad \text{1: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{1: } 2r + = 1r \times (-1)$$

$$(*) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2x_3 - x_4 \\ x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1: \quad * \quad L(\vec{a}, \vec{b})^\perp \quad \text{1: } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 2: } \text{基底}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の基底, } \text{基底} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \quad | \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | = 1 \neq 0$$

$$1: \quad * \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{基底} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{1: } L(\vec{a}, \vec{b})^\perp \text{ の基底}$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{w} \in L(\vec{a}, \vec{b})^\perp \iff (\vec{w}, (\vec{a}, \vec{b}) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}) = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\iff \left({}^t(\vec{a}, \vec{b}) \vec{w}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\iff {}^t(\vec{a}, \vec{b}) \vec{w} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\boxed{(\mathbb{R}^2)^\perp = \{ \vec{0} \}}$$

と ${}^t(\cdot)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の双線形形式 ($\vec{a}, \vec{b}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ の双対基底)

IV $\textcircled{III}$ と $\textcircled{IV}$ の $\vec{w}$ は

$$\vec{w} \in L(\vec{a}, \vec{b})^\perp \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \textcircled{*}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{*} \iff \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

と $\vec{w}$ の x_2 は

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -x_3 - x_4 \\ 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と $\vec{w}$ は $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ の

$$\textcircled{*} \quad L(\vec{a}, \vec{b})^\perp \text{ は } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の線形包}$$

と $\vec{e}_3, \vec{e}_4$ の基底 $\vec{e}_3, \vec{e}_4$ は $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ と $\vec{e}_3, \vec{e}_4$ の

$$\textcircled{*} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と $\vec{e}_3, \vec{e}_4$ は $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $L(\vec{a}, \vec{b})^\perp$ の基底である。