

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ とする.

$$\left| \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16} (2 \text{ の } 1)$$

①

スカラー-3重積

3×3 行列 $\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$ の行列式 $\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix}$ は、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の体積を意味する。

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a} \times \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b})$$

$$\text{つまり成り立つ} \quad (\vec{b}, \vec{a} \times \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{c} \times \vec{a}) \text{ により成り立つ。}$$

例 1 (1) を示す。

スカラー-4重積

(1) を用いて示す。

$$\begin{vmatrix} \vec{a} \times \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{13列の交換} \\ \downarrow}}{=} (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d})$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \times \vec{d} \end{vmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d})$$

$\uparrow$
33列の交換

2" 成り立つ = 確かめよう。 $331 = 231$

$$\begin{vmatrix} \vec{a} \times \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix} \stackrel{\downarrow}{=} (\vec{c}, \vec{d} \times (\vec{a} \times \vec{b}))$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \times \vec{d} \end{vmatrix} = (\vec{a}, \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}))$$

$\uparrow$
13列

と成り立つ。

$$(\vec{a}, \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})) = (\vec{c}, \vec{d} \times (\vec{a} \times \vec{b}))$$

つまり成り立つ。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ とする。

$$(2) \quad \vec{\omega} \cdot \{ \vec{x}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_i) \} = \vec{\omega} \cdot \{ \vec{x}_i \times (\vec{\omega}' \times \vec{x}_i) \}$$

2" 成り立つ = 確かめよう。

$$\Pi(\vec{\omega}) := \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_i)$$

と置く。

$$\Pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

が定まる。

例 2 Π が線形写像であることを示す。

(2) 証明

$$(\Pi(\vec{w}), \vec{w}') = (\vec{w}, \Pi(\vec{w}'))$$

この式の2つの Π は 3次元対称行列で表わされる = である。

(3)

$$(\mathbb{R}^3)^* \otimes \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) = \text{End}(\mathbb{R}^3)$$

この式の2つの Π は $(1, 1)$ 型、混合テンソルで表わされる。

(これは混合テンソルである。)

$\#$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中 $\mathbb{R}^2$ 的 $\mathbb{R}$ 子空间， $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的 $\mathbb{R}$ 子空间， $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的 $\mathbb{R}$ 子空间。

$$H = \sum_{i=1}^2 \epsilon_i \sigma_i^x (\vec{1}_3 \times \vec{1}_6)$$

正回転座標変換する = 25° 必要になる (±0.5°)

2) 準備 12 以下 5 行 2 列

Ex 12 $RGSO(3) = SU(2) \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$R(\vec{a} \times \vec{b}) = R\vec{a} \times R\vec{b}$$

$\Sigma \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (直観的例) $= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$

証明. R は直交行列だから $104 \equiv 1 \pmod{2}$. 従って

$$(R(\vec{a} \times \vec{b}), R\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$$

108

$$\begin{aligned} (|\vec{R} \vec{a} \times \vec{R} \vec{b}, \vec{R} \vec{c}\rangle) &= |\vec{R} \vec{a} \vec{R} \vec{b} \vec{R} \vec{c}| \\ &= |\vec{R}| \cdot |\vec{a} \vec{b} \vec{c}| \quad (\vec{R} \in SO(3) \Rightarrow |\vec{R}|=1) \\ &= |\vec{a} \vec{b} \vec{c}| = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) \end{aligned}$$

徒乙

$$(R(\vec{a} \times \vec{b}), R\vec{c}) = (R\vec{a} \times R\vec{b}, R\vec{c})$$

है कि, $\vec{c} = R \vec{e}_j$ ($j=1, 2, 3$) में रखें तो

$$R(\vec{a} \times \vec{b}) = R\vec{a} \times R\vec{b}$$

③ $|R|=1$ かつ $2 \leq |S| \leq 2$ に注意。かつ

(4)

$$\vec{\omega}' = R \vec{\omega} \quad \text{where } R \vec{\omega} = \vec{\omega}$$

$\in \text{RESO}(3) = \text{F.O. 2nd order tensor}$

$$\vec{\omega}' = R \vec{\omega} = R I \vec{\omega} = \sum_i m_i R(\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i))$$

$$= \sum_i m_i R \vec{r}_i \times R(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$= \sum_i m_i R \vec{r}_i \times (R \vec{\omega} \times R \vec{r}_i)$$

$$= \sum_i m_i R \vec{r}_i \times (\vec{\omega}' \times R \vec{r}_i)$$

where $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ is the angular velocity.

where $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ is the angular velocity

where $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ is the angular velocity $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) \vec{c} - (\vec{a}, \vec{c}) \vec{b}$

$$\vec{\omega} = \vec{0} \text{ is the angular velocity}$$

$$R \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ where } \text{RESO}(3) \text{ is the tensor}$$

$$R(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})) = R \vec{a} \times (R \vec{b} \times R \vec{c})$$

where $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$R(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})) = (R \vec{a}, R \vec{b}) R \vec{c} - (R \vec{a}, R \vec{c}) R \vec{b}$$

$$\text{where } R \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, R \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ where}$$

$$R(\vec{a}) = \dots \quad R(\vec{a}) = \dots$$

where $\vec{a}$ is the vector (where $\vec{a} \cdot \vec{a} = 1$)