

MSF2025LA L06 05/22 小テスト解答

(1)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{1r \leftrightarrow \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r+ = 1r \times (-1), 3r+ = 1r \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{2r \times (-\frac{2}{3})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r+ = 2r \times (-\frac{1}{2}), 3r+ = 1r \times (-\frac{3}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{3r \times (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{1r+ = 3r \times \frac{1}{3}, 2r+ = 3r \times (-\frac{5}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と行基本変形されます。

(2) 求めた狭義の階段行列の第 4 列, 第 5 列, 第 6 列を

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

と定めると

$$(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{e}_1) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{b}_1), \quad (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{e}_2) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{b}_2), \quad (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{e}_3) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{b}_3)$$

となります。これから

$$A\vec{x} = \vec{e}_j \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{b}_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

であることが分かります。 $A(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3) = (A\vec{x}_1 \ A\vec{x}_2 \ A\vec{x}_3)$ なので

$$AX = I_3 \Leftrightarrow A\vec{x}_j = \vec{e}_j (j = 1, 2, 3)$$

であることも分かります。以上から求める X は

$$X = (\vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \vec{x}_3) = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

と一意的に求まります。

(3) 行基本変形の逆は行基本変形で、行基本変形と列の交換は交換しますから、(1) の行基本変形の逆を用いると

$$(X|I_3) \rightarrow \cdots \rightarrow (I_3|A)$$

と行基本変形できることが分かります。従って (2) の議論と同様に $XA = I_3$ が成立することが分かります。注意 $A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$AX = XA = I_n$$

を満たす $X \in M_n(\mathbf{K})$ が存在するとき A は正則であるといいます。 A が正則であるとき、 $X, Y \in M_n(\mathbf{K})$ が

$$AX = XA = I_n, \quad AY = YA = I_n \quad (1)$$

を満たすとします。このとき $XA = I_n$ に右から Y を掛けると

$$(XA)Y = I_n Y = Y \quad \text{さらに} \quad (XA)Y = X(AY) = X I_n = X \quad \text{から} \quad X = Y$$

が従います。このとき $A^{-1} = X$ と定めて A の逆行列と呼びます。

と直接示すこともできます。

一般の線型写像 $F: K^n \rightarrow K^m$ について考えます。上で m 行 n 列の $A \in M_{m,n}(K)$ が定める F_A の場合と同様に F の線型性から $\vec{x} \in K^n$ に対して

$$F(\vec{x}) = x_1 F(\vec{e}_1) + \cdots + x_n F(\vec{e}_n) = (F(\vec{e}_1) \cdots F(\vec{e}_n)) \vec{x}$$

と成立します。これは $A = (F(\vec{e}_1) \cdots F(\vec{e}_n)) \in M_{m,n}(K)$ に対して

$$F = F_A$$

が成立することを意味します。ここで

$$\text{Hom}(K^n, K^m) := \{F: K^n \rightarrow K^m; F \text{ は線型}\}$$

と定義域が K^n で値域が K^m である線型写像全体の集合を定めると写像

$$\begin{array}{ccc} M_{m,n}(K) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Hom}(K^n, K^m) \\ A & \longmapsto & F_A \end{array}$$

が全射であることを意味します。また (8) から Φ が単射であることも分かります。実際 $A_1, A_2 \in M_{m,n}(K)$ に対して $F_{A_1} = F_{A_2}$ が成立すると任意の $\vec{x} \in K^n$ に対して $A_1 \vec{x} = A_2 \vec{x}$ を意味しますが、これから $A_1 = A_2$ が従います。さらに全射 Φ の逆写像は

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(K^n, K^m) & \xrightarrow{\Psi} & M_{m,n}(K) \\ F & \longmapsto & (F(\vec{e}_1) \cdots F(\vec{e}_n)) \end{array}$$

であることも分かります。

最後に m 行 n 列の $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \in M_{m,n}(K)$ に対して $F_A: K^n \rightarrow K^m$ の像 $\text{Im}(A)$ について考えます。値域のベクトル $\vec{b} \in K^m$ に対して

$$\vec{b} \in \text{Im}(F_A) \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in K^n \cdot \vec{b} = F_A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in K^n \vec{b} = A\vec{x}$$

が成立します。さらに $A\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n$ から

$$\vec{b} \in \text{Im}(F_A) \Leftrightarrow \vec{b} \in L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) := \{x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n \in K^m; x_j \in K (j = 1, \dots, n)\}$$

ここで

$$\text{Im}(A) := \text{Im}(F_A) = L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

と定義して、 A の像と呼びます。

$\text{Im}(A)$ は和とスカラー倍について閉じています：

$\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in K^n$ と $\lambda, \mu \in K$ に対して

$$\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \text{Im}(A) \Rightarrow \lambda \vec{y}_1 + \mu \vec{y}_2 \in \text{Im}(A)$$

実際、 $\vec{y}_1 = A\vec{x}_1$, $\vec{y}_2 = A\vec{x}_2$ を満たす $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K^n$ が存在するので

$$\lambda \vec{y}_1 + \mu \vec{y}_2 = \lambda A\vec{x}_1 + \mu A\vec{x}_2 = A(\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2) \in \text{Im}(A)$$

が成立します。最後の等号ににおいて通常の逆向きに A 倍の線型性を使っているのですね。見づらくもありません。

一般に K^m の部分集合 V が和とスカラー倍について閉じているとき:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

V は K^m の部分空間であるといいます。

演習 1.1. m 行 n 列の行列 $A \in M_{m,n}(K)$ に対して

$$\ker(A) := \{\vec{x} \in K^n; A\vec{x} = \vec{0}\}$$

が K^n の部分空間であることを示しましょう。 $\ker(A)$ を A の核または解空間と呼びます。

演習 1.2. (2025L04 05/01 の補足問題) 以下の行列の積を計算しましょう。

$$\begin{array}{llll} (1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ (5) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & (7) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & (8) \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ (9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & (10) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & (11) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & (12) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ (13) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & & & \end{array}$$

補足問題 L05-0515 の 11.7.21 の問題

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 8 \\ -1 & -3 & 3 & -5 & 3 \\ 3 & 9 & -1 & 7 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

1. 行列 A の基底を求めよ。

基底は L06 にある (L05 の 11.7.21 の問題の答え) を紹介したいが...

× $V \subset K^n$ かつ $V \neq \{\vec{0}\}$ と $\dim V = r$ とする。

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r \in V$ かつ V の基底とは

1) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ は LI, 2) $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} = c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_r \vec{a}_r$ と書ける。
i.e. $V = L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r)$

⑤ V に基底 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ と $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r \in V$ かつ $\vec{a}_i = \vec{e}_i$ と $i = 1, \dots, r$

これら V の基底を呼ぶ。 $\dim V = r$

この基底は $\vec{a}_i$ に $\vec{e}_i$ と置き換えるだけで済みます。(S22 解法)

解答

演習 1.1 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in K^n$ が $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker(A)$ を満たすとします。このとき $A\vec{v}_1 = A\vec{v}_2 = \vec{0}$ が成立しますが,

$$A(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) = \lambda A\vec{v}_1 + \mu A\vec{v}_2 = \lambda\vec{0} + \mu\vec{0} = \vec{0}$$

から $\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in \ker(A)$ であることが分かります。

演習 1.2

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda z \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x + y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda z \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda x + z \end{pmatrix} \quad (12) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + \lambda z \\ z \end{pmatrix}$$

$$(13) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda y + z \end{pmatrix}$$

補足

・(1) について $I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を 3 次の単位行列と呼びます。

・(2)-(13) についてこれから行基本変形が左から行列を掛けることに対応していることが分かります。ここで出てくる行列のことを 3 次の基本行列と呼びます。ただし、(5),(6),(7) では $\lambda \neq 0$ とします。対応する行基本変形を列記すると

$$(2) 1r \leftrightarrow 2r \quad (3) 1r \leftrightarrow 3r \quad (4) 2r \leftrightarrow 3r \quad (5) 1r \times = \lambda \quad (6) 2r \times = \lambda \quad (7) 3r \times = \lambda$$

$$(8) 1r + = 2r \times \lambda \quad (9) 2r + = 1r \times \lambda \quad (10) 1r + = 3r \times \lambda \quad (11) 3r + = 1r \times \lambda \quad (12) 2r + = 3r \times \lambda$$

$$(13) 3r + = 2r \times \lambda$$

となります。

3 次の基本行列は I_3 や $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ などがあります。

$$I_3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (1r \leftrightarrow 3r)$$

$$(5) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (1r \times = \lambda)$$

$$(11) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b \\ \lambda a_1 + c \end{pmatrix}$$

行基本変形 = 左から基本行列を掛ける

17) 2問 (11) ~ (12) の行列が "正則" であることは示さず、逆行列を求めよ。