

①

正対角行列の三角化とCHの定理.

定理 ($n=3$) $A \in M_3(\mathbb{K})$ かつ

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$$

Σ 上の $T = \mathcal{J}$ と $\mathcal{I}$ かつ $\mathcal{I} = \mathcal{A}$ と $\mathcal{I} \left(\exists P \in M_3(\mathbb{K}) \text{ かつ } P \text{ は正則} \right)$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$\mathcal{I}$ は三角化行列 $\mathcal{I}$ に座標変換される.

($\frac{1}{3}$ 証明) $\chi_A(\alpha) = 0$ なる α について $(\exists \vec{p}_1 \neq \vec{0} \quad A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1)$ かつ成立する.

$\vec{p}_1$ と Σ 上の $\vec{p}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ は $\mathbb{K}^3$ の基底となるから $\mathcal{I} = \mathcal{A}$ かつ $\mathcal{I} = \mathcal{A}$ かつ

$$Q := (\vec{p}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)$$

$$\mathcal{I} \text{ は正則} \quad AQ = (\vec{p}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) \begin{pmatrix} \alpha & *_{12} & *_{13} \\ 0 & *_{22} & *_{23} \\ 0 & *_{32} & *_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{かつ} \quad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ 0 & * & \\ 0 & & \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \chi_{Q^{-1}AQ}(\lambda) \quad (\text{変数変換}) \\ &= (\lambda - \alpha) \chi_B(\lambda) \quad \text{ただし } B = \begin{pmatrix} *_{22} & *_{23} \\ *_{32} & *_{33} \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma) \end{aligned}$$

かつ $\chi_B(\lambda) = (\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$ と $\mathcal{I}$ かつ $\mathcal{I} = \mathcal{A}$ 定理 ($n=2$)

かつ $\mathcal{I}$ かつ $\mathcal{I} = \mathcal{A}$ (証明: $\mathcal{I}$ かつ $\mathcal{I} = \mathcal{A}$) $\left(\exists Q_2 \in M_2(\mathbb{K}) \text{ かつ } Q_2 \text{ は正則} \right)$

$$Q_2^{-1}BQ_2 = \begin{pmatrix} \beta & * \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

と $\mathcal{I}$ かつ

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix} \text{ とすると } Q_3 \text{ は正則} \quad Q_3^{-1}Q^{-1}AQQ_3 \stackrel{\mathcal{I}}{=} \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & & \gamma \end{pmatrix}$$

(2)

証明は「 K 上の多項式関数

定理 $A \in M_n(K)$ なら

$$\bar{\chi}_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_n), \quad \alpha_j \in K \quad (j=1, \dots, n)$$

と等しいならば、 $\exists P \in M_n(K)$ なる可逆行列

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

により対角化可能である。

命題 $P \in M_3(K)$ は可逆行列で $f \in K[\lambda]$ ならば、

$$A \in M_3(K) \mapsto f(A)$$

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$$

が成り立つ。

証明 示す。

証明 $A \in M_3(K)$ なら $\bar{\chi}_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$
 $\exists T \in GL_3(K)$ なる可逆行列 $(\alpha, \beta, \gamma \in K)$

$$A_0 := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

と対角化可能である。 $f(A_0) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma) \mapsto f(A_0)$

$$f(A_0) = 0_3$$

と示す。 $C-H$ の定理

$$\bar{\chi}_A(A) = 0_3$$

を示す。

定理 $A \in M_3(K)$ は

$$\overline{\Phi}_A(A) = O_3$$

と示すことができる。

代数学の基本定理から

$$\overline{\Phi}_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ であることは分かったが、 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ と想定して
問題を解くのは成立するとは分かった。 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは

この問題 のように、2-重化して $\mathbb{F}_3$ に移す

が、(その当時時代にはかなり前の) 数学には必要であった。
その利便を促した。 (3.17)

一般化して、証明を以下で示す。

$$A \in M_3(K) \text{ の } \overline{\Phi}_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

$\alpha, \beta, \gamma \in K$ と示すことができる。 $\Rightarrow$ $\exists Q_1 \in M_3(K)$ 2-
重化して $\mathbb{F}_3$ に移す。

$$A_1 := Q_1^{-1} A Q_1 = \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

と示すことができる。 $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$ とすると、上の議論より

$$f(A_1) = O_3$$

と示すことができる。 $\Rightarrow$ $\overline{\Phi}_B(\lambda) = (\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$ 2-
 $\overline{\Phi}_B(B) = O_2$ と分かった。 (3.17) のように示す。

↑

3-重化して示すことができる。 ($n=2$ の場合)

④

$$\begin{aligned}
 f(A_1) &= (A_1 - \alpha I_3)(A_1 - \beta I_3)(A_1 - \gamma I_3) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - \beta & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - \gamma & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= 0_3
 \end{aligned}$$

と示せました。 $\Rightarrow$ 任意の $A \in M_n(K)$ のとき $f(A) = 0_n$ となる。