4 次行列式

1　定義と基本性質

1.1　定義

以下では 4 次正方行列の行列式について解説していきますが，3 次行列式および 2 次行列式の性質を前提とします．まず，4 次行列式を

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \tag{1}$$

によって定義します．この定義が第 1 列に関する余因子展開と呼ばれることになります．右辺の各項に出てくる 4 個の 3 次行列式をそれぞれの第 1 列に関して展開することを考えます．例えば a_1b_2 または a_2b_1 を含む項は

$$a_1b_2 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2b_1 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

とまとめられます．次に a_2b_3 または a_3b_2 が出てくる項は

$$-a_2(-b_3) \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3(-b_2) \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

とまとめられます．一般に $i < j$ として a_ib_j または a_jb_i が出てくる項は $k < \ell$, $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$ として

$$(-1)^{i+1}a_i(-1)^{j+1-1}b_j \begin{vmatrix} c_k & d_\ell \\ c_\ell & d_\ell \end{vmatrix} + (-1)^{j+1}a_j(-1)^{i+1}b_i \begin{vmatrix} c_k & d_k \\ c_\ell & d_\ell \end{vmatrix} = (-1)^{i+j+1} \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_k & d_k \\ c_\ell & d_\ell \end{vmatrix} \tag{2}$$

とまとめられます．実際 $i < j$ のとき

$$\begin{matrix} a_i & b_i & \cdots \\ & & \\ a_j & b_j & \cdots \end{matrix} \qquad A \text{ の第 } i \text{ 行を消すと } b_j \text{ は第 } (j-1) \text{ 行となります．}$$

$$\begin{matrix} a_i & b_i & \cdots \\ & & \\ a_j & b_j & \cdots \end{matrix} \qquad A \text{ の第 } j \text{ 行を消すと } b_i \text{ は第 } i \text{ 行のままです．}$$

このことから (2) における $(-1)^{j+1-1}b_j$ と $(-1)^{i+1}b_i$ の符号が理解できるはずです．従って

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \sum_{(*)} (-1)^{i+j+1} \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_k & d_k \\ c_\ell & d_\ell \end{vmatrix} \tag{3}$$

となります。ここで総和記号は

$$i < j,\ k < \ell,\ \{i, j, k.\ell\} = \{1, 2, 3, 4\} \tag{4}$$

を満たす i, j, k, ℓ に関する和を意味します．

注意 (3) の符号 $(-1)^{i+j+1}$ ですが，(3) を一般化した Laplace 展開では

$$(-1)^{i+j+1} = (-1)^i(-1)^j(-1)^1(-1)^2$$

と読み替えるのが自然です．これは A から i 行と j 行，1 列と 2 列を除いたことから符号を定めています。

1.2　列に関する基本性質

(I) 列に関する線型性 (1) を使うと各 j 列に関して線型であることが示されます：

$$|\cdots\ \lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\ \cdots| = \lambda\cdot|\cdots\ \vec{x}\ \cdots| + \mu\cdot|\cdots\vec{y}\ \cdots|$$

場合を分けて考えますが，$j=1$ すなわち第 1 列に関しては (1) をじっと睨むと（$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ が定数であるとすると）a_1, a_2, a_3, a_4 の斉次 1 次式であることが分かります。

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}| = *_1 a_1 + *_2 a_2 + *_3 a_3 + *_4 a_4$$

これから第 1 列に関して線型であることが従います．次に第 2 列に関する線型性について考えましょう．3 次行列式が各列に関して線型であることを用います．実際

$$\begin{aligned}
&|\vec{a}\ \lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\ \vec{c}\ \vec{d}| \\
&= a_1\begin{vmatrix}\lambda x_2+\mu y_2 & c_2 & d_2\\ \lambda x_3+\mu y_3 & c_3 & d_3\\ \lambda x_4+\mu y_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}\lambda x_1+\mu y_1 & c_1 & d_1\\ \lambda x_3+\mu y_3 & c_3 & d_3\\ \lambda x_4+\mu y_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}\lambda x_1+\mu y_1 & c_1 & d_1\\ \lambda x_2+\mu y_2 & c_2 & d_2\\ \lambda x_4+\mu y_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix}\lambda x_1+\mu y_1 & c_1 & d_1\\ \lambda x_2+\mu y_2 & c_2 & d_2\\ \lambda x_3+\mu y_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix} \\
&= a_1\left(\lambda\begin{vmatrix}x_2 & c_2 & d_2\\ x_3 & c_3 & d_3\\ x_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix}y_2 & c_2 & d_2\\ y_3 & c_3 & d_3\\ y_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix}\right) - a_2\left(\lambda\begin{vmatrix}x_1 & c_1 & d_1\\ x_3 & c_3 & d_3\\ x_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix}y_1 & c_1 & d_1\\ y_3 & c_3 & d_3\\ y_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix}\right) \\
&\quad + a_3\left(\lambda\begin{vmatrix}x_1 & c_1 & d_1\\ x_2 & c_2 & d_2\\ x_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix}y_1 & c_1 & d_1\\ y_2 & c_2 & d_2\\ y_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix}\right) - a_4\left(\lambda\begin{vmatrix}x_1 & c_1 & d_1\\ x_2 & c_2 & d_2\\ x_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix}y_1 & c_1 & d_1\\ y_2 & c_2 & d_2\\ y_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}\right) \\
&= \lambda a_1\begin{vmatrix}x_2 & c_2 & d_2\\ x_3 & c_3 & d_3\\ x_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} - \lambda a_2\begin{vmatrix}x_1 & c_1 & d_1\\ x_3 & c_3 & d_3\\ x_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} + \lambda a_3\begin{vmatrix}x_1 & c_1 & d_1\\ x_2 & c_2 & d_2\\ x_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} - \lambda a_4\begin{vmatrix}x_1 & c_1 & d_1\\ x_2 & c_2 & d_2\\ x_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix} \\
&\quad + \mu a_1\begin{vmatrix}y_2 & c_2 & d_2\\ y_3 & c_3 & d_3\\ y_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} - \mu a_2\begin{vmatrix}y_1 & c_1 & d_1\\ y_3 & c_3 & d_3\\ y_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} + \mu a_3\begin{vmatrix}y_1 & c_1 & d_1\\ y_2 & c_2 & d_2\\ y_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} - \mu a_4\begin{vmatrix}y_1 & c_1 & d_1\\ y_2 & c_2 & d_2\\ y_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix} \\
&= \lambda\left(a_1\begin{vmatrix}x_2 & c_2 & d_2\\ x_3 & c_3 & d_3\\ x_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}x_1 & c_1 & d_1\\ x_3 & c_3 & d_3\\ x_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}x_1 & c_1 & d_1\\ x_2 & c_2 & d_2\\ x_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix}x_1 & c_1 & d_1\\ x_2 & c_2 & d_2\\ x_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}\right) \\
&\quad + \mu\left(a_1\begin{vmatrix}y_2 & c_2 & d_2\\ y_3 & c_3 & d_3\\ y_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}y_1 & c_1 & d_1\\ y_3 & c_3 & d_3\\ y_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}y_1 & c_1 & d_1\\ y_2 & c_2 & d_2\\ y_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix}y_1 & c_1 & d_1\\ y_2 & c_2 & d_2\\ y_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}\right) \\
&= \lambda|\vec{a}\ \vec{x}\ \vec{c}\ \vec{d}| + \mu|\vec{a}\ \vec{y}\ \vec{c}\ \vec{d}|
\end{aligned}$$

と示せます．

問　第 3,4 列に関する線型性を示してみましょう．

(II) 列に関する交代性 (1) と (3) を使うと 2 次行列式または 3 次行列式の列に関する交代性から列に関する交代性が導けます．

$$|\cdots\ \vec{x}_i\ \cdots\ \vec{x}_j\ \cdots| = -|\cdots\ \vec{x}_j\ \cdots\ \vec{x}_i\ \cdots|$$

場合を分けて考えていきます．$2 \leq i < j$ のときは (1) を用いて示します．実際，第 2 列と第 4 列の交換の場合は以下のように示せます．

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} d_2 & c_2 & b_2 \\ d_3 & c_3 & b_3 \\ d_4 & c_4 & b_4 \end{vmatrix} - a_2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} d_1 & c_1 & b_1 \\ d_3 & c_3 & b_3 \\ d_4 & c_4 & b_4 \end{vmatrix} + a_3 \cdot (-1) \begin{vmatrix} d_1 & c_1 & b_1 \\ d_2 & c_2 & b_2 \\ d_4 & c_4 & b_4 \end{vmatrix} - a_4 \cdot (-1) \begin{vmatrix} d_1 & c_1 & b_1 \\ d_2 & c_2 & b_2 \\ d_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= -|\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{c}\ \vec{b}|
\end{aligned}$$

と示せます．次に第 1 列と第 2 列の交換に関して (3) を用いて考えていきましょう．以下で総和記号は (3) と同様の (4) であるとします．すなわち

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} &= \sum_{(*)} (-1)^{i+j+1} \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_k & d_k \\ c_\ell & d_\ell \end{vmatrix} \\
&= \sum_{(*)} (-1)^{i+j+1} (-1) \begin{vmatrix} b_i & a_i \\ b_j & a_j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_k & d_k \\ c_\ell & d_\ell \end{vmatrix} \\
&= -|\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}\ \vec{d}|
\end{aligned}$$

となります．最後に残る $i = 1$ かつ $3 \leq j$ の場合ですが，例えば $j = 4$ の場合

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}| = -|\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{c}\ \vec{b}| = |\vec{d}\ \vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}| = -|\vec{d}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}|$$

と交代性を示すことができます．

(III) 正規性　単位行列 I_4 の行列式は 1 です：

$$|I_4| = 1$$

これは (1) を使えば 3 次行列式の正規性からすぐに従います．

2　行の性質・転置行列の行列式

まず各行に関する線型性について考えます．

(I) 行に関する線型性

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \\ \vdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{x} \\ \vdots \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{y} \\ \vdots \end{vmatrix}$$

第 4 行に関する線型性を示してみましょう．ここでは 3 次行列式の第 3 行に関する線型性を用いていき

ます.

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 & \lambda x_2 + \mu y_2 & \lambda x_3 + \mu y_3 & \lambda x_4 + \mu y_4 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 & \lambda x_3 + \mu y_3 & \lambda x_4 + \mu y_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 & \lambda x_3 + \mu y_3 & \lambda x_4 + \mu y_4 \end{vmatrix} \\
&\qquad + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 & \lambda x_3 + \mu y_3 & \lambda x_4 + \mu y_4 \end{vmatrix} - (\lambda x_1 + \mu y_1) \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \left(\lambda \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} \right) - b_1 \left(\lambda \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} \right) \\
&\qquad + c_1 \left(\lambda \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} \right) - (\lambda x_1 + \mu y_1) \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \\
&= \lambda \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \right) \\
&\qquad + \mu \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \right) \\
&= \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

と示されます.

転置行列の行列式　行に関する交代性を示す前に，転置行列の行列式について考えます.

$$
\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \tag{5}
$$

4 次正方行列 $A \in M_4(\mathbf{R})$ に対して

$$
\left| {}^t A \right| = |A|
$$

(5) を示します．まず左辺の第 1 行を線型性を用いて展開します.

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= \begin{vmatrix} a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4 \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} + a_4 \begin{vmatrix} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

ここでさらに最右辺の各 4 次行列式を第 1 列に関して展開します．例えば第 4 項の 4 次行列式は

$$
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_4 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_4 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}
$$

と変形されますが，最後に 3 次正方行列 $B \in M_3(\mathbf{R})$ に対して $|{}^tB| = |B|$ が成立することを用いています．この変形を 4 つの項に施すと

$$\mathrm{LHS} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

となります．

(II) 行に関する交代性　列に関する交代性と転置行列の行列式の性質を組み合わせると行に関する交代性を導けます．

$i < j$ とするとき

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{x}_i \\ \vdots \\ \mathbf{x}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{x}_j \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

例えば第 1 行と第 3 行の交換について考えます．

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} = |{}^t\mathbf{a}\ {}^t\mathbf{b}\ {}^t\mathbf{c}\ {}^t\mathbf{d}| = -|{}^t\mathbf{c}\ {}^t\mathbf{b}\ {}^t\mathbf{a}\ {}^t\mathbf{d}| = - \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

と示せます．

3　余因子展開

3.1　列に関する余因子展開と余因子行列

4 次行列式 $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ を (1) において第 1 列に関して展開する形で定義しました．ここでは第 4 列に関して展開することを考えましょう．そのために

$$|A| = |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}| = -|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}\ \vec{c}| = |\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{b}\ \vec{c}| = -|\vec{d}\ \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}|$$

と第 4 列 $\vec{d}$ を第 1 列に移動させて考えます．ここで最後の項の符号 (-1) は列の交換を 3 回したという意味で $(-1)^{4-1}$ と考えます：

$$\begin{aligned} |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}| &= (-1)^{4-1} |\vec{d}\ \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = (-1)^{4-1} \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ d_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{4-1} d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - (-1)^{4-1} d_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + (-1)^{4-1} d_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - (-1)^{4-1} d_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

さらに

$$d_1 = (-1)^{1-1} d_1, \quad -d_2 = (-1)^{2-1} d_2, \quad d_3 = (-1)^{3-1} d_3, \quad -d_4 = (-1)^{4-1} d_4$$

なので

$$\begin{aligned} &(-1)^{4-1} d_1 = (-1)^{1-1}(-1)^{4-1} d_1 = (-1)^{1+4} d_1, \quad -(-1)^{4-1} d_2 = (-1)^{2-1}(-1)^{4-1} d_2 = (-1)^{2+4} d_2 \\ &(-1)^{4-1} d_3 = (-1)^{3-1}(-1)^{4-1} d_1 = (-1)^{3+4} d_3, \quad -(-1)^{4-1} d_4 = (-1)^{4-1}(-1)^{4-1} d_4 = (-1)^{4+4} d_2 \end{aligned}$$

から

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}| &= (-1)^{4-1}|\vec{d}\ \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = (-1)^{4-1}\begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ d_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+4}d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}d_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4}d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}d_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

となります．一般に 4 次正方行列から i 行と j 列を除いた 3 次正方行列を A_{ij} と記し，さらに

$$
\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij}) \tag{6}
$$

を A の (i,j) **余因子**と呼びます．上の A の第 4 列に関する展開において

$$
\tilde{A}_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix},\ \tilde{A}_{24} \quad = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix},\ \tilde{A}_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix},\ \tilde{A}_{44} \quad = (-1)^{4+4}d\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

と対応していますから

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}| &= -d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + d_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + d_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= d_1\tilde{A}_{14} + d_2\tilde{A}_{24} + d_1\tilde{A}_{34} + d_1\tilde{A}_{44}
\end{aligned}
$$

この式は

$$
|A| = \left(\tilde{A}_{14}\ \tilde{A}_{24}\ \tilde{A}_{34}\ \tilde{A}_{44}\right)\vec{d} = \left(-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right)\vec{d} \tag{7}
$$

と表すと後に余因子行列の性質を考える上で楽になります．

以上で第 1 列と第 4 列に関する**余因子展開**について解説をしましたが，第 2 列と第 3 列に関する余因子展開を含めると以下のようになります．

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\
&= -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\
&= c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \\
&= -d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + d_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + d_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

問 第 2 列と第 3 列に関する余因子展開を第 4 列の余因子展開と同様に示しましょう．

この式を (7) のように表すと

$$
\begin{aligned}
|A| &= \left(\tilde{A}_{11}\ \tilde{A}_{21}\ \tilde{A}_{31}\ \tilde{A}_{41}\right)\vec{a} \\
&= \left(\tilde{A}_{12}\ \tilde{A}_{22}\ \tilde{A}_{32}\ \tilde{A}_{42}\right)\vec{b} \\
&= \left(\tilde{A}_{13}\ \tilde{A}_{23}\ \tilde{A}_{33}\ \tilde{A}_{43}\right)\vec{c} \\
&= \left(\tilde{A}_{14}\ \tilde{A}_{24}\ \tilde{A}_{34}\ \tilde{A}_{44}\right)\vec{d}
\end{aligned}
$$

となりますが，**余因子行列**を

$$
\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{41} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{42} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{43} \\ \tilde{A}_{14} & \tilde{A}_{24} & \tilde{A}_{34} & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix} \tag{8}
$$

と定めると

$$\tilde{A}(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}) = \begin{pmatrix} |A| & * & * & * \\ * & |A| & * & * \\ * & * & |A| & * \\ * & * & * & |A| \end{pmatrix}$$

となります．この式の右辺の非対角成分について考えます．例えば右辺の 3 行 2 列は $\tilde{A}$ の第 3 行と A の第 2 列 $\vec{b}$ の積で第 3 列の余因子展開において $\vec{c}$ を $\vec{b}$ に交換したものとなります．実際

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{43} \end{pmatrix} \vec{b} = |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{b}\ \vec{d}| = 0$$

となります．繰り返しになりますが，これは第 3 列の余因子展開

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{43} \end{pmatrix} \vec{c} = |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}|$$

の $\vec{c}$ を $\vec{b}$ に置き換えたものとなっていることに注意しましょう．

同様に $i \neq j$ のとき $\tilde{A}A$ の i 行 j 列は 0 となり

$$\tilde{A}A = |A| \cdot I_4 \tag{9}$$

であることが分かります．

問 $\tilde{A}A$ の 1 行 4 列，2 行 1 列，3 行 4 列，4 行 2 列が 0 となることを示しましょう．

3.2 行に関する余因子展開と余因子行列

3.2.1 転置行列の余因子行列

4 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の余因子行列について復習しましょう．ここで a_{ij} が A の i 行 j 列を表します．列ベクトル表示と行ベクトル表示を

$$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{pmatrix}$$

と定めます．A の第 i 行と第 j 列を除いた 3 次正方行列を A_{ij} として，その行列式を $\tilde{A}_{ij}$ とします．$\tilde{A}_{ij}$ が j 行 i 列となる行列が A の余因子行列 $\tilde{A}$ となります．

ここで A の転置行列を $B = {}^tA = (b_{ji})$ と定めます．B の j 行 i 列が $b_{ji} = a_{ij}$ となり，列ベクトル表示と行ベクトル表示は

$$B = {}^tA = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 & {}^t\mathbf{a}_2 & {}^t\mathbf{a}_3 & {}^t\mathbf{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \\ {}^t\vec{a}_3 \\ {}^t\vec{a}_4 \end{pmatrix}$$

となります．B から第 j 行と第 i 列を除いた 3 次正方行列は A_{ij} の転置行列になります：

$$B_{ji} = {}^t(A_{ij})$$

従って

$$\tilde{B}_{ji} = \tilde{A}_{ij} \quad \text{従って} \quad \tilde{B} = {}^t(\tilde{A})$$

であることが分かります．ここで 3 次行列式が転置で不変であることを用いています．以上で次の定理を示しましょた．

Theorem 1. *(1)4* 次正方行列 $A \in M_4(\mathbf{R})$ に対して

$$\widetilde{{}^tA} = {}^t(\tilde{A})$$

が成立します．

(2) *4* 次正方行列 $A \in M_4(\mathbf{R})$ に対して

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = |A| \cdot I_4$$

が成立します．

Proof. (1) はすでに示してあります．(2) については $\tilde{A}A = |A| \cdot I_4$ は示しています．従って $A\tilde{A} = |A| \cdot I_4$ を示します．$B = {}^tA$ とします．このとき

$$\tilde{B}B = |B| \cdot I_4$$

が成立します．この両辺の転置を考えると ${}^tB = A,\ {}^t(\tilde{B}) = \widetilde{{}^tB} = \tilde{A}$ が成立しますから

$$A\tilde{A} = |B| \cdot I_4 \quad 従って \quad A\tilde{A} = |A| \cdot I_4$$

であることが分かります．最後に $|A| = |B|,\ {}^tI_4 = I_4$ であることを用いています． □

4　順列の符号と行列式

4.1　3 次行列式の場合を発展させる

3 次元列ベクトルを標準単位ベクトルで表現します：

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3, \quad \vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$$

これを用いて $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}|$ を展開します．

$$\begin{aligned} |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| &= |a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3\ b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\ c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3| \\ &= \sum_{i_1=1,2,3,\ i_2=1,2,3,\ i_3=1,2,3} a_{i_1}b_{i_2}c_{i_3}|\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_{i_3}| \end{aligned}$$

と $3 \times 3 \times 3 = 27$ 個の項の和として展開できます．ここで，交代性から例えば

$$|\vec{e}_3\ \vec{e}_1\ \vec{e}_3| = 0 \quad (i_1 = 3,\ i_2 = 1,\ i_3 = 3 \text{ の場合})$$

が成立しますから

$$i_1 = i_2 \text{ OR } i_1 = i_3 \text{ OR } i_2 = i_3 \ \Rightarrow |\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_{i_3}| = 0$$

すなわち $|\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_{i_3}|$ は相異なる 2 列が等しい場合値が 0 となることが分かります．これを用いると上で 27 項の和として展開したのは

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = \sum_{(*)} a_{i_1}b_{i_2}c_{i_3}|\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_{i_3}|$$

と条件

$$(*) \quad i_1 \neq i_2,\ \text{AND } i_1 \neq i_3,\ \text{AND } i_2 \neq i_3$$

を満たす (i_1, i_2, i_3) の和となります．ここで i_1, i_2, i_3 は $1, 2, 3$ を並び替えたもので，この和は $3! = 6$ 項の和であることに注意します．ここで $1, 2, 3$ の順列全体を

$$S_3 := \{(i_1\ i_2\ i_3) \in \{1, 2, 3\}^3;\ i_1 \neq i_2,\ \text{AND } i_1 \neq i_3,\ \text{AND } i_2 \neq i_3\}$$

と定義します．そして $\sigma = (i_1\ i_2\ i_3) \in S_3$ に対してその**符号**を

$$\varepsilon(\sigma) = |\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_{i_3}|$$

と定義します．$\sigma \in S_3$ は 6 個ありますから，その符号は各個計算するだけでもいいのですが，ここではさらに高次の行列式を考えるために少し理屈っぽく計算します．そのために 1, 2 の順列全体

$$S_2 := \{(i_1\ i_2) \in \{1,2\}^2;\ i_1 \neq i_2\}$$

と $\sigma = (i_1\ i_2) \in S_2$ の符号を

$$\varepsilon(\sigma) = |\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_2}|$$

と定義します．$S_2 = \{(1\ 2),\ (2\ 1)\}$ なので直接計算すると

$$\varepsilon(1\ 2) = |\vec{e}_1\ \vec{e}_2| = \left|\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right| = 1$$
$$\varepsilon(2\ 1) = |\vec{e}_2\ \vec{e}_1| = \left|\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right| = -1$$

となります．

さて $\sigma = (i_1\ i_2\ i_3) \in S_3$ の符号を計算しましょう．

(I) $i_3 = 3$ のとき このとき $(i_1, i_2) = (1,2), (2,1)$ の 2 通りの場合があります．

$$\varepsilon(i_1\ i_2\ 3) = |\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_3| = \begin{cases} \left|\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right| = 1 = \varepsilon(i_1\ i_2) & (i_1 = 1,\ i_2 = 2) \\ \left|\begin{smallmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right| = -1 = \varepsilon(i_1\ i_2) & (i_1 = 2,\ i_2 = 1) \end{cases}$$

から

$$\boxed{\varepsilon(i_1\ i_2\ 3) = \varepsilon(i_1\ i_2)}$$

であることが分かります．

(II) $i_1 = 3$ のとき $\{i_2, i_3\} = \{1,2\}$ となりますが

$$\varepsilon(3\ i_2\ i_3) = |\vec{e}_3\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_{i_3}| = -|\vec{e}_{i_3}\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_3| = -\varepsilon(i_3\ i_2\ 3) = -\varepsilon(i_3\ i_2)$$

となります．

(III) $i_2 = 3$ のとき $\{i_1, i_3\} = \{1,2\}$ となりますが

$$\varepsilon(i_1\ 3\ i_3) = |\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_3\ \vec{e}_{i_3}| = -|\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_3}\ \vec{e}_3| = -\varepsilon(i_1\ i_3\ 3) = -\varepsilon(i_1\ i_3)$$

となります．

(I) と (II) をまとめると

$$\boxed{\varepsilon(3\ i_2\ i_3) = -\varepsilon(i_3\ i_2\ 3) = -\varepsilon(i_3\ i_2), \quad \varepsilon(i_1\ 3\ i_3) = -\varepsilon(i_1\ i_3\ 3) = -\varepsilon(i_1\ i_3)}$$

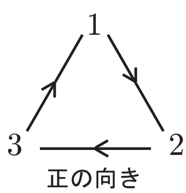
となります．具体的には 6 個の順列を辞書式順序に並べて

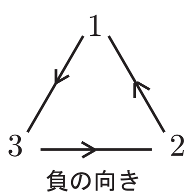
$$\begin{array}{llllll} \varepsilon(1\ 2\ 3) & = 1, & \varepsilon(1\ 3\ 2) & = -1, & \varepsilon(2\ 1\ 3) & = -1 \\ \varepsilon(2\ 3\ 1) & = 1, & \varepsilon(3\ 1\ 2) & = -1, & \varepsilon(3\ 2\ 1) & = 1 \end{array}$$

となります．符号が $+1$ のとき順列を正の向きであるといい -1 のとき負の向きであるといいますが，それぞれの場合

$$i \to j \to k \to i$$

が右図の左側と右側に当てはまります．





4.2　4 次行列式の場合に発展させる

4 次元列ベクトルを標準単位ベクトルで表現します：

$$\begin{array}{rclcrcl}\vec{a} &=& a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + a_4\vec{e}_4, && \vec{b} &=& b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 + b_4\vec{e}_4 \\ \vec{c} &=& c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 + c_4\vec{e}_4, && \vec{d} &=& d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2 + d_3\vec{e}_3 + d_4\vec{e}_4\end{array}$$

これを用いて 4 次行列式 $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}|$ を展開します.

$$\begin{aligned}|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}| &= |a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + a_4\vec{e}_4 \quad b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 + b_4\vec{e}_4 \\ &\qquad\qquad c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 + c_4\vec{e}_4 \quad d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2 + d_3\vec{e}_3 + d_4\vec{e}_4| \\ &= \sum_{(i_1,i_2,i_3,i_4)\in\{1,2,3,4\}^4} a_{i_1}b_{i_2}c_{i_3}d_{i_4}|\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_{i_3}\ \vec{e}_{i_4}|\end{aligned}$$

と $4^4 = 256$ 個の項の和として展開できます．ここで，交代性から例えば

$$|\vec{e}_3\ \vec{e}_1\ \vec{e}_3\ \vec{e}_2| = 0 \quad (i_1 = 3,\ i_2 = 1,\ i_3 = 3,\ i_4 = 2 \text{ の場合})$$

が成立しますから

$$\text{ある } (j,k) \text{ に対して} j \neq k,\ i_j = i_k \Rightarrow |\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_{i_3}\ \vec{e}_{i_4}| = 0$$

すなわち $|\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_{i_3}\ \vec{e}_{i_4}|$ は相異なる 2 列が等しい場合値が 0 となることが分かります．これを用いると上で 256 項の和として展開したのは

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}| = \sum_{(*)} a_{i_1}b_{i_2}c_{i_3}d_{i_4}|\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_{i_3}\ \vec{e}_{i_4}|$$

と条件

$$(*) \quad j \neq k \Rightarrow i_j \neq i_k$$

を満たす (i_1, i_2, i_3, i_4) の和となります．ここで i_1, i_2, i_3, i_4 は $1, 2, 3, 4$ を並び替えたもので，この和は $4! = 24$ 項の和であることに注意します．ここで $1, 2, 3, 4$ の順列全体を

$$S_4 = \{(i_1\ i_2\ i_3\ i_4) \in \{1,2,3,4\}^4;\ j \neq k \Rightarrow i_j \neq i_k\}$$

として，$\sigma = (i_1\ i_2\ i_3\ i_4) \in S_4$ に対してその**符号**を

$$\varepsilon(\sigma) := |\vec{e}_{i_1}\ \vec{e}_{i_2}\ \vec{e}_{i_3}\ \vec{e}_{i_4}|$$

と定義します．このとき

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}| = \sum_{(*)} \varepsilon(i_1\ i_2\ i_3\ i_4) \cdot a_{i_1}b_{i_2}c_{i_3}d_{i_4}$$

となります．ここで順列の符号の性質を導きます.

<u>(I) $i_4 = 4$ の場合</u> このとき $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3\}$ 従って $(i_1\ i_2\ i_3) \in S_3$ すなわち i_1, i_2, i_3 が $1, 2, 3$ を並べ換えた順列であることが分かります．例えば $\sigma = (3\ 1\ 2\ 4)$ の場合

$$\varepsilon(3\ 1\ 2\ 4) = \begin{vmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0 \end{vmatrix} = |\vec{e}_3\ \vec{e}_1\ \vec{e}_2| = \varepsilon(3\ 1\ 2)$$

となります．ここで第 4 列の余因子展開を用いています．一般には

$$\boxed{\varepsilon(i_1\ i_2\ i_3\ 4) = \varepsilon(i_1\ i_2\ i_3)}$$

が成立します．<u>(II) $i_4 \neq 4$ の場合</u> この場合は (I) の場合に帰着できます．例えば $\sigma = (3\ 4\ 1\ 2)$ の場合

$$\varepsilon(3\ 4\ 1\ 2) = |\vec{e}_3\ \vec{e}_4\ \vec{e}_1\ \vec{e}_2| = -|\vec{e}_3\ \vec{e}_2\ \vec{e}_1\ \vec{e}_4| = -\varepsilon(3\ 2\ 1\ 4) = -\varepsilon(3\ 2\ 1)$$

となります．一般には

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(4\ i_2\ i_3\ i_4) = -\varepsilon(i_4\ i_2\ i_3\ 4) = -\varepsilon(i_4\ i_2\ i_3) \\
\varepsilon(i_1\ 4\ i_3\ i_4) = -\varepsilon(i_1\ i_4\ i_3\ 4) = -\varepsilon(i_1\ i_4\ i_3) \\
\varepsilon(i_1\ i_2\ 4\ i_4) = -\varepsilon(i_1\ i_2\ i_4\ 4) = -\varepsilon(i_1\ i_2\ i_4)
\end{aligned}
$$

が成立します．