

1° $A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3) \in M_3(\mathbb{R})$ とおき $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^3$ とおき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \vec{a}_1 + y \vec{a}_2 + z \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$$

から

$$B = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) \in M_3(\mathbb{R}) \text{ 12312}$$

$$AB = (A \vec{e}_1 \ A \vec{e}_2 \ A \vec{e}_3) \in M_3(\mathbb{R}) \text{ とおき } (A \vec{e}_j \in \mathbb{R}^3)$$

$$A, B: 3 \times 3 \text{ 正則行列} \Rightarrow A \text{ と } B \text{ の積は } 3 \times 3 \text{ 正則行列}$$

2° $A, B \in M_3(\mathbb{R}), \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ とおき $(AB) \vec{v} = A(B \vec{v})$ (結合則)

$$A, B, C \in M_3(\mathbb{R}) \text{ とおき } (AB)C = A(BC) \text{ (結合則)}$$

$$A, B \in M_3(\mathbb{R}), \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ とおき } (AB) \vec{v} = A(B \vec{v})$$

2° $I_3 = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) \text{ 3311912311}$

$$A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3) \text{ 12312 } A \vec{e}_1 = 1 \vec{a}_1 + 0 \vec{a}_2 + 0 \vec{a}_3 = \vec{a}_1$$

$$A \vec{e}_2 = 0 \vec{a}_1 + 1 \vec{a}_2 + 0 \vec{a}_3 = \vec{a}_2, \quad A \vec{e}_3 = 0 \vec{a}_1 + 0 \vec{a}_2 + 1 \vec{a}_3 = \vec{a}_3$$

から

$$A I_3 = A (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) = (A \vec{e}_1 \ A \vec{e}_2 \ A \vec{e}_3) = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3) = A$$

$$A I_3 = A \quad (A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3) \text{ 3311912311})$$

1° $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ 12312 } \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \text{ から}$

$$\vec{x} = I_3 \vec{x}$$

$$X = (\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3) \in M_3(\mathbb{R}) \text{ 12312}$$

$$I_3 X = (I_3 \vec{x}_1 \ I_3 \vec{x}_2 \ I_3 \vec{x}_3) = (\vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \vec{x}_3) = X$$

$$I_3 X = X$$

$$X = (\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3) \in M_3(\mathbb{R})$$

定義

$$A \in M_3(\mathbb{R}) \text{ が正規行列とは} \\ \exists X \in M_3(\mathbb{R}) \quad AX = XA = I_3.$$

上の条件を満たす $X \in M_3(\mathbb{R})$ は一意の。実際

$$AX = XA = I_3, \quad AY = YA = I_3$$

とすると

$$X = XI_3 = X(AY) = (XA)Y = I_3Y = Y.$$

よって、これから $XA = I_3 \Rightarrow \underline{A^{-1} = X}.$

定理

$A \in M_3(\mathbb{R})$ に対し、次の条件は同値。

- (1) A は正規行列
- (2) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \quad \left(A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) \text{ かつ } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \text{ は LI} \right)$
- (3) $|A| \neq 0$

(3) は行列式が定数 $\neq 0$ であること。

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$A\vec{v} = \vec{0} \text{ ならば } X(A\vec{v}) = X\vec{0} = \vec{0}$$

$$X(A\vec{v}) = (XA)\vec{v} = I_3\vec{v} = \vec{v} \text{ ならば } \underline{\vec{v} = \vec{0}}$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

(2) $\Rightarrow$ $A \rightarrow \dots \rightarrow (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)$ は行基本変形、
 “=” である。

$$(A|\vec{e}_1) \rightarrow \dots \rightarrow (I_3|\vec{p}_1)$$

$$(A|\vec{e}_2) \rightarrow \dots \rightarrow (I_3|\vec{p}_2)$$

$$(A|\vec{e}_3) \rightarrow \dots \rightarrow (I_3|\vec{p}_3)$$

したがって $(A|I_3) \rightarrow \dots \rightarrow (I_3|P)$

よって $AP = I_3$ かつ $(P|I_3) \rightarrow \dots \rightarrow (I_3|A)$ かつ

$PA = I_3$ となる。よって $A^{-1} = P$ である。

MSI=2024

(LO8-0528 の QID 1123 の (2) 1 = 8'112 11, 12 = 105

5

(2) 112 11, 12 = 105

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ とする } I_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \text{ を用いて}$$

行基本変形

$$(A | I_3) \rightarrow \dots \rightarrow (I_3 | \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix})$$

$$\text{から得られる } B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \text{ とする}$$

$$A \vec{e}_1 = \vec{e}_1, A \vec{e}_2 = \vec{e}_2, A \vec{e}_3 = \vec{e}_3$$

従って

$$AB = (A \vec{e}_1, A \vec{e}_2, A \vec{e}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = I_3.$$

よって $(I_3 \in 3 \times 3 \text{ 逆置行列})$ と呼ぶ

3 行 3 列の行基本変形, 9 変数は 行基本変形, 2" 変数は 2" *

$$(B | I_3) \rightarrow \dots \rightarrow (I_3 | A)$$

より行基本変形から得られる, 2" 変数は

$$B \vec{a}_1 = \vec{e}_1, B \vec{a}_2 = \vec{e}_2, B \vec{a}_3 = \vec{e}_3$$

従って

$$BA = (B \vec{a}_1, B \vec{a}_2, B \vec{a}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = I_3$$

と得る. 1. 2. 2"

$$A^{-1} = B, B^{-1} = A$$

から得る.

① $i \neq j \quad (i \leftrightarrow j)^{-1} = (i \leftrightarrow j)$

② $i \neq j \quad (i \leftrightarrow j \times \lambda)^{-1} = (i \leftrightarrow j \times (-\lambda))$

$\lambda \neq 0 \quad (i \times \lambda)^{-1} = i \times \frac{1}{\lambda}$

MSF2025LA L06 05/22 小テスト解答

(1)

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{1r \leftrightarrow \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r+=-1r \times (-1), 3r+=-1r \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{2r \leftrightarrow (-\frac{2}{3})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r+=-2r \times (-\frac{1}{2}), 3r+=-1r \times (-\frac{2}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{3r \times (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{1r+=-3r \times \frac{1}{3}, 2r+=-3r \times (-\frac{5}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

と行基本変形されます。

(2) 求めた狭義の階段行列の第 4 列, 第 5 列, 第 6 列を

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

と定めると

$$(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{e}_1) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{b}_1), \quad (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{e}_2) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{b}_2), \quad (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{e}_3) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{b}_3)$$

となります。これから

$$A\vec{x} = \vec{e}_j \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{b}_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

であることが分かります。 $A(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3) = (A\vec{x}_1 \ A\vec{x}_2 \ A\vec{x}_3)$ なので

$$AX = I_3 \Leftrightarrow A\vec{x}_j = \vec{e}_j (j = 1, 2, 3)$$

であることも分かります。以上から求める X は

$$X = (\vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \vec{x}_3) = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

と一意的に求まります。

(3) 行基本変形の逆は行基本変形で, 行基本変形と列の交換は交換しますから, (1) の行基本変形の逆を用いると

$$(X|I_3) \rightarrow \cdots \rightarrow (I_3|A)$$

と行基本変形できることが分かります。従って (2) の議論と同様に $XA = I_3$ が成立することが分かります。注意 $A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$AX = XA = I_n$$

を満たす $X \in M_n(\mathbf{K})$ が存在するとき A は正則であるといいます。 A が正則であるとき, $X, Y \in M_n(\mathbf{K})$ が

$$AX = XA = I_n, \quad AY = YA = I_n \quad (1)$$

を満たすとします。このとき $XA = I_n$ に右から Y を掛けると

$$(XA)Y = I_n Y = Y \quad \text{さらに} \quad (XA)Y = X(AY) = X I_n = X \quad \text{から} \quad X = Y$$

が従います。このとき $A^{-1} = X$ と定めて A の逆行列と呼びます。

The End.