が成立することに注意しましょう．

次に (3.5) において b_1, b_2, b_3（または c_1, c_2, c_3）について整理すると，次の各列に関する**余因子展開**が成立することにも注意しよう．

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

3 次の行列式の基本性質については後に詳細を述べますが，以下ですぐに必要になる性質についてまとめましょう．

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ に対して以下が成立します．

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = -|\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}| = -|\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}| = -|\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}|$$

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{b}| = |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}| = |\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{c}| = 0$$

これらは 2 次の行列式の交代性（定理 3.3）と余因子展開を用いて示せます．

3.3.2　ベクトルの外積・行列式の幾何学的な意味

ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の**外積**（**ベクトル積**）を右のように定めました．外積 $\vec{b} \times \vec{c}$ は

$$\vec{b} \perp \vec{b} \times \vec{c}, \qquad \vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c} \tag{3.7}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

を満たすことを (3.4) で直観的に説明してあります．厳密にこのことを示すために公式

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) \tag{3.8}$$

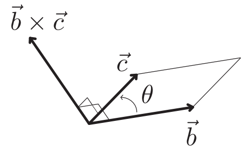
が成立することに注意します．この公式を用いると

$$(\vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}) = |\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{c}| = 0$$

が従い，$\vec{b} \perp \vec{b} \times \vec{c}$ が分かります．また $\vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c}$ も同様です．

次に $\vec{b}\times\vec{c}$ の大きさについて注意します．2 本のベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が定める平行四辺形の面積 S について考えます．$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ とします．このとき

$$\begin{aligned} S &= ||\vec{b}||\cdot||\vec{c}||\cdot\sin\theta \\ &= ||\vec{b}||\cdot||\vec{c}||\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= ||\vec{b}||\cdot||\vec{c}||\cdot\sqrt{1-\left(\frac{(\vec{b},\vec{c})}{||\vec{b}||\cdot||\vec{c}||}\right)^2} \\ &= \sqrt{||\vec{b}||^2\cdot||\vec{c}||^2-(\vec{b},\vec{c})^2} \end{aligned}$$



から

$$\begin{aligned} S^2 &= ||\vec{b}||^2\cdot||\vec{c}||^2-(\vec{b},\vec{c})^2 \\ &= \left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2 \\ &= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2=||\vec{b}\times\vec{c}||^2 \end{aligned}$$

を得ます．すなわち

$$S=||\vec{b}\times\vec{c}|| \tag{3.9}$$

を示しました．$\vec{b}$ と $\vec{c}$ に垂直で大きさが S であるベクトルは 2 本ありますが，そのどちらが $\vec{b}\times\vec{c}$ になるのかについて軽く説明します．座標系が**右手系**の場合は，$\vec{b}$ から $\vec{c}$ へ右手の親指以外の 4 本の指を揃えて向かうときに親指が向かう方向が $\vec{b}\times\vec{c}$ です（**右ねじの向き**）．また座標系が**左手系**の場合は，同じことを左手で行います.（前ページの図は，右手系の場合を考えています.）詳しくは述べられませんが (3.8) を用いて得られる

$$\det(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{b}\times\vec{c})=||\vec{b}\times\vec{c}||^2>0$$

が $\vec{b}\times\vec{c}\neq\vec{0}$ であるときに成立することから，$\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{b}\times c$ が標準単位ベクトルを用いた $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ と同じ「向き」を持ちます．このことから以上の事実が示せます．

公式 (3.9) を用いて，3 次の行列式の幾何的な性質について説明します．3 本のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が定める平行 6 面体の体積を V とします．$\vec{b}$, $\vec{c}$ が定める平行四辺形を底面として体積 V を考えます．すると垂直方向 $\vec{b}\times\vec{c}$ と $\vec{a}$ とのなす角を φ とすると，高さ h は

$$h=|\ ||\vec{a}||\cdot\cos\varphi\ |=\left|\,||\vec{a}||\cdot\frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{a}||\cdot||\vec{b}\times\vec{c}||}\right|=\left|\frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{b}\times\vec{c}||}\right|$$

と計算されます．これから

$$V=S\cdot h=||\vec{b}\times\vec{c}||\cdot\left|\frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{b}\times\vec{c}||}\right|=\left|(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})\right|=\left|\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\right|$$

となります．

演習 3.1. ベクトルの外積について以下の性質が成立することを示しましょう.
(1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a},\quad \vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$　*(2)* $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
(3) $(\lambda\vec{a})\times b = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

演習 3.2. $\vec{a} = {}^t(1\ 1\ 0)$, $\vec{b} = {}^t(0\ 1\ \ -1)$, $\vec{c} = {}^t(1\ 2\ 3)$ に対して，以下を求めましょう.
(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積.　*(2)* $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交する単位ベクトル.
(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$, $\vec{c}$ が張る平行六面体の体積.

3.4　内積・直交射影

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n,$$

に対して $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = (\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

と定めます．さらに $\vec{x}$ の大きさ（ノルム）を

$$||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

と定めます.

ベクトルの内積と大きさについては次の定理が成立します.

定理 3.5. $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z} \in \mathbf{R}^n$ と $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して

$$(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = (\vec{x},\vec{z}) + (\vec{y},\vec{z}) \tag{3.10}$$

$$(\vec{x},\vec{y}+\vec{z}) = (\vec{x},\vec{y}) + (\vec{x},\vec{z}) \tag{3.11}$$

$$(\lambda\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x},\vec{y}) \tag{3.12}$$

$$(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x}) \tag{3.13}$$

$$||\lambda\vec{x}|| = |\lambda|\cdot||\vec{x}|| \tag{3.14}$$

$$||\vec{x}|| \geqq 0, \quad ||\vec{x}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \tag{3.15}$$

さらに定理 3.5 を用いて

$$||\vec{x}\pm\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 \pm 2(\vec{x},\vec{y}) + ||\vec{y}||^2 \tag{3.16}$$

を示すことができます.

演習 3.3. (3.16) を示しましょう.

最後に $\vec{x} \neq 0$ のとき

$$f(t) = ||\vec{y} - t\vec{x}||^2$$

の最小値を求めてみましょう.

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2||\vec{x}||^2 - 2t(\vec{x},\vec{y}) + ||\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 \left(t^2 - 2\frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}t + \frac{||\vec{y}||^2}{||\vec{x}||^2} \right) \\ &= ||\vec{x}||^2 \left\{ \left(t - \frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2} \right)^2 + \frac{||\vec{y}||^2}{||\vec{x}||^2} - \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{||\vec{x}||^4} \right\} \end{aligned}$$

ですから $t = t_0 := \dfrac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}$ であるときに $f(t)$ は最小値

$$||\vec{y}||^2 - \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{||\vec{x}||^2} = \frac{1}{||\vec{x}||^2}\left(||\vec{x}||^2||\vec{y}||^2 - (\vec{x},\vec{y})^2\right) \tag{3.17}$$

をとります．さらに

$$\begin{aligned} (\vec{y} - t_0\vec{x}, \vec{x}) &= (\vec{y},\vec{x}) - t_0||\vec{x}||^2 \\ &= (\vec{y},\vec{x}) - \frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}||\vec{x}||^2 = 0 \end{aligned}$$

から

$$\vec{y} - t_0\vec{x} \perp \vec{x}$$

であることが分かります.

$$t_0\vec{x} = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}\vec{x}$$

を $\vec{y}$ の $\vec{x}$方向への正射影(直交射影)と呼びます.

さらに

$$0 \leq ||\vec{y} - t_0\vec{x}||^2 = \frac{||\vec{x}||^2 \cdot ||\vec{y}||^2 - (\boldsymbol{x},\vec{y})^2}{||\vec{x}||^2}$$

から次の定理を得ます.

定理 3.6. **（コーシー・シュヴァルツの不等式）** $\vec{x},\vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$|(\vec{x},\vec{y})| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$$

が成立します.