「2次元列ベクトル3本はLD」

L04_0503において次の定理を示した

定理1 (#) $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y = 0 \end{cases}$ に対して

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \iff \left((\#) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \iff \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ が } (\#) \text{ を満たす.}$$

この定理を用いると次の定理が示せる.

定理2 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{K}^2$ はLD すなわち

(＊) $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ は非自明解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

を持つ.

① $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき (＊)において $z = 1$ とした

$$x\vec{a} + y\vec{b} = -\vec{c}$$

は解 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ を持つ (クラメールの公式). このとき $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$

は (＊) の非自明解.

② $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ のとき (＊)において $z = 0$ として

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$$

は非自明解 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ を持つ. このとき $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

は (＊) の非自明解

講義では示さなかったが以下の別証明がある.

<u>$\vec{a}=\vec{0}$ のとき.</u> $1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}=\vec{0}$ なので

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は ㊍ の非自明解.

<u>$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき</u> (i) $a_1\neq 0$ のとき.

$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & b_1' & c_1' \\ 0 & b_2' & c_2' \end{pmatrix}$ と行基本変形できる.

このとき次の<u>補題</u>により $\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が存在し

$$y_0 b_2' + z_0 c_2' = 0$$

となる. このとき $x_0 = -b_1' y_0 - c_1' z_0$ とおくと $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}\neq\vec{0}$

は ㊍ の非自明解.

(ii) $a_2\neq 0$ のとき $1r\leftrightarrow 2r$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}$$

を用いると (i)に帰着できる.

<u>補題</u> $a, b\in\mathbb{K}$ のとき ある $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が

㊍ $ax+by=0$

を満たす.

$a(-b)+b\cdot a=0$ から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ は ㊍ の解.

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\neq\vec{0}$ のとき $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\neq\vec{0}$ である. 一方 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\vec{0}$ のとき.

例えば $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\neq\vec{0}$ は $0\cdot 1+0\cdot 0=0$ から非自明解.