SLINL01 小テスト補足（その2）

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := \{x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \in \mathbb{R}^n \,;\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

と定義する（した？）

$$\boxed{L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ は } + \text{ と } \cdot \text{ について閉じている.}}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ とすると

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}, \quad \vec{v}_2 = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$$

$$= (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

と書ける

$$\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2)\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$= \left((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \ (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$= \left((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right)$$

で $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ から $\lambda \vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ が分かる.

L01 の小テストから（特に(1)）

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \mid \vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) \to \cdots \to \left(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3 \,\middle|\, \begin{matrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{matrix}\right)$$

から

$$(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

となる. 以下 $S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ とする.

他方 (2) から

$$(I_3 \mid S) \to \cdots \to \left(\begin{matrix} 0 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{matrix} \middle| \, I_3 \right)$$

列の順序を交換して

$$(S \mid I_3) \to \cdots \to \left(I_3 \, \middle| \begin{matrix} 0 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{matrix} \right)$$

から $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$ が従う. ($S \to \cdots \to I_3$ から S 正則も従う)

また (1) と (2) から $(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) \to \cdots \to I_3$ となるので $\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}$ は LI

である.

(1) の両辺に S^{-1} をかけると

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\, S^{-1}$$

も示せることに注意.

一般に　$L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \ni \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ ならば $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ は LD

であることを L04 ? で示す.

上の状況で $L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \supset L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$, $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$: LI が分かって

いるとする. もし $\supsetneq$ ならば $\exists \vec{s} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ $\vec{s} \notin L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$

このとき $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ は LI となってしまうが「一般に」からこれは

有り得ない. よって "=" すなわち

$$L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$$

が従う.