小テスト補足

次の定理をまず示そう

定理 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{K}^3$ はLD.

場合分けをして示す

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ がLDとする. $x_0\vec{a} + y_0\vec{b} + z_0\vec{c} = \vec{0}$ を満たす $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在する. このとき

$$x_0\vec{a} + y_0\vec{b} + z_0\vec{c} + 0\,\vec{d} = \vec{0}$$

が成立して $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ であるので $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ はLD.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ がLIとする. $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる

行基本変形が存在する. これを用いると,

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1' \\ 0 & 1 & 0 & d_2' \\ 0 & 0 & 1 & d_3' \end{pmatrix}$$

したがって $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + w\vec{d} = \vec{0} \cdots (\#) \iff \begin{cases} x = -wd_1' \\ y = -wd_2' \\ z = -wd_3' \end{cases}$

となり $x = d_1'$, $y = d_2'$, $z = d_3'$, $w = -1$ は $(\#)$ の非自明解.

これから $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ がLDが従う.

問 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{K}^3$ に対して

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| \neq 0 \iff (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow x = y = z = 0)$$

を用いて証明してみよう. (これはL02で示せると思います).

定理 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbb{K}^m$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{K}^m$ $(m \geqq 3)$ とします.

$$\left.\begin{array}{l} L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) \subset L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \\ \vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \text{ は LI} \end{array}\right\} \Rightarrow L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) \subsetneqq L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ として矛盾を導く.

$\exists \vec{f} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}),\ \notin L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ が存在する.

> **補題** $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{f} \in \mathbb{K}^m$ が LI $\Longleftrightarrow$ $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が LI, $\vec{f} \notin L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$
> (補題を示してみる)

この補題を用いると $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{f}$ は $\in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ で LI となる.

$$(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}\ \vec{f}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

であるが 前定理によると $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$ を満たす $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ が存在するので

$$(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}\ \vec{f})\vec{\alpha} = \vec{0}, \quad \vec{\alpha} \neq \vec{0}$$

から $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{f}$ は LD と矛盾が生じる. よって「$\subsetneqq$」としたことがおかしい. 従って $L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ となる.