QID 1124

**I (1)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}|\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})$ を狭義の階段行列に行基本変形して，$\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ の定数倍の和として表しましょう．

**(2)** (1) の行基本変形に続けて，第 4 列，第 5 列，第 6 列を $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ になるように行基本変形しましょう（第 1 列，第 2 列，第 3 列を忘れないように）．その結果を用いて $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ の定数倍の和として表しましょう．

**(3)**

$$L := L(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$$

が成立することを示しましょう．そして任意の $\vec{v}\in L$ が

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q} + \zeta\vec{q} \tag{1}$$

と一意的に表されることを示しましょう（一意性が問題です）．

**(4)** 上の (1) が成立するとき $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} \xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$ で表し，逆に $\begin{pmatrix} \xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ で表しましょう．

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\3\end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\3\\-4\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{p} = \begin{pmatrix}-4\\-1\\16\\18\end{pmatrix},\quad \vec{q} = \begin{pmatrix}7\\4\\-20\\-21\end{pmatrix},\quad \vec{r} = \begin{pmatrix}7\\6\\-16\\-15\end{pmatrix}$$

**（解答）(1)**

$1r \leftrightarrow 2r$

$$\begin{bmatrix}0&2&3&-4&7&7\\1&2&3&-1&4&6\\2&2&-4&16&-20&-16\\3&3&-3&18&-21&-15\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&3&-1&4&6\\0&2&3&-4&7&7\\2&2&-4&16&-20&-16\\3&3&-3&18&-21&-15\end{bmatrix}$$

$3r+=1r*(-2)$,$4r+=1r*(-3)$

$$\to \begin{bmatrix}1&2&3&-1&4&6\\0&2&3&-4&7&7\\0&-2&-10&18&-28&-28\\0&-3&-12&21&-33&-33\end{bmatrix}$$

$2r* = (1/2)$

$$\to \begin{bmatrix}1&2&3&-1&4&6\\0&1&\frac{3}{2}&-2&\frac{7}{2}&\frac{7}{2}\\0&-2&-10&18&-28&-28\\0&-3&-12&21&-33&-33\end{bmatrix}$$

$1r+=2r*(-2)$,$3r+=2r*(2)$, $4r+=2r*(3)$

$$\to \begin{bmatrix}1&0&0&3&-3&-1\\0&1&\frac{3}{2}&-2&\frac{7}{2}&\frac{7}{2}\\0&0&-7&14&-21&-21\\0&0&-\frac{15}{2}&15&-\frac{45}{2}&-\frac{45}{2}\end{bmatrix}$$

$3r* = (-1/7)$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & 15 & -\frac{45}{2} & -\frac{45}{2} \end{bmatrix}$$

$1r+ = 3r*(0)$,$2r+ = 3r*(-3/2)$, $4r+ = 3r*(15/2)$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以上から
$\vec{p} = (3)\vec{a} + (1)\vec{b} + (-2)\vec{c}$, $\vec{q} = (-3)\vec{a} + (-1)\vec{b} + (3)\vec{c}$, $\vec{r} = (-1)\vec{a} + (-1)\vec{b} + (3)\vec{c}$,
が分かります.

**(2)** $1r* = (1/3)$

$$\to \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2r+ = 1r*(-1)$,$3r+ = 1r*(2)$

$$\to \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2r \leftrightarrow 3r$

$$\to \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2r* = (1)$

$$\to \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$1r+ = 2r*(1)$,$3r+ = 1r*(0)$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2r* = (-3/2)$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cont.

$1r+=3r*(-2)$,$2r+=3r*(-7/3)$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以上から

$\vec{a}=(0)\vec{p}+(-1/2)\vec{q}+(1/2)\vec{r}$, $\vec{b}=(3)\vec{p}+(7/2)\vec{q}+(-3/2)\vec{r}$,

$\vec{c}=(1)\vec{p}+(1)\vec{q}+(0)\vec{r}$,

が分かります．

**(3)** (1) と (2) から

$$(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．$\vec{v}\in L(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})$ とすると

$$\vec{v}=(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

が

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

によって成立します．これは

$$L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})\subset L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

を意味します．他方 $\vec{v}\in L(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ とすると

$$\vec{v}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}\in L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$$

が

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって成立します．これは

$$L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\subset L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$$

を意味します．以上で

$$L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})=L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

を示しました．一意性については (1) と (2) から

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\to\cdots\to(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3), \quad (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\to\cdots\to(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$$

と行基本変形できることが分かっていますから $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は LI であり，$\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ は LI であることが分かります．これから $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=x'\vec{a}+y'\vec{b}+z'\vec{c}$ とすると

$$(x-x')\vec{a}+(y-y')\vec{b}+(z-z')\vec{c}=\vec{0}$$

から $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$ が従います．他方 $\xi\vec{p}+\eta\vec{q}+\zeta\vec{r}=\xi'\vec{p}+\eta'\vec{q}+\zeta'\vec{r}$ とすると

$$(\xi-\xi')\vec{p}+(\eta-\eta')\vec{q}+(\zeta-\zeta')\vec{r}=\vec{0}$$

から $\xi=\xi'$, $\eta=\eta'$, $\zeta=\zeta'$ が従います.

**(4)** (3) から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

が成立することが分かります.

The End.