ハンドアウト

0705
SLin L01

①

MSFの補足

$\vec{a}=\vec{0}$ のとき　$1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}=\vec{0}$ なので

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ は ㊀ の非自明解.

定理　$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{K}^2$ は LD

2×2 行列に対して

$|A|=0 \Leftrightarrow \exists\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\vec{0}\quad A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}$

を用いて示している.

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき　(i) $a_1\neq 0$ のとき.

$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & b_1' & c_1'\\ 0 & b_2' & c_2'\end{pmatrix}$ と行基本変形できる.

このとき次の補題により $\begin{pmatrix}y_0\\z_0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が存在して

$$y_0 b_2' + z_0 c_2' = 0$$

となる. このとき　$x_0=-b_1'y_0-c_1'z_0$ とおくと $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$

は ㊀ の非自明解.

(ii) $a_2\neq 0$ のとき　1r ⇔ 2r

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ a_1 & b_1 & c_1\end{pmatrix}$$

を用いると (i) に帰着できる.

補題　$a,b\in\mathbb{K}$ のとき ある $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が

㊁ $ax+by=0$

を満たす.

$a(-b)+b\cdot a=0$ から $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ は ㊁ の解.

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ のとき　$\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ である. 一方 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\vec{0}$ のとき.

例えば $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ は　$0\cdot1+0\cdot0=0$ から非自明解.

定理 | $L(\vec{c},\vec{d})\subset L(\vec{a},\vec{b})$ と $\vec{c}\nparallel\vec{d}$ から

$L(\vec{c},\vec{d})=L(\vec{a},\vec{b})$

が従う。背理法で示せる。$L(\vec{c},\vec{d})\subsetneq L(\vec{a},\vec{b})$ とすると、$\exists\vec{f}\in L(\vec{a},\vec{b})$ が $\vec{f}\notin L(\vec{c},\vec{d})$ を満たす。このとき

$\vec{c},\vec{d},\vec{f}$ はLI. 実際

$$\xi\vec{c}+\eta\vec{d}+\zeta\vec{f}=\vec{0}$$

とするとき $\zeta\neq0$ は成立しない。$\zeta\neq0$ ならば $\vec{f}=-\frac{\xi}{\zeta}\vec{c}-\frac{\eta}{\zeta}\vec{d}\in L(\vec{c},\vec{d})$

となるからである。よって $\zeta=0$. このとき $\xi\vec{c}+\eta\vec{d}=\vec{0}$

から $\xi=\eta=0$. ところが $L(\vec{a},\vec{b})$ に3本の線形独立なベクトルは存在しないので矛盾が生じる。($\subsetneq$ は成立しなく $=$)

「…」を示そう。

$$\vec{c}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b},\quad \vec{d}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b},\quad \vec{f}=x_3\vec{a}+y_3\vec{b}$$

とすると

$$\vec{0}=\lambda\vec{c}+\mu\vec{d}+\nu\vec{f}$$

$$=(\vec{c}\ \vec{d}\ \vec{f})\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$$

とするとこれは

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=\vec{0}$$

と同値だがこれには非自明な $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が存在する。

MSFにおいて以下を示している。

定理 | $A \in M_2(\mathbb{K})$ に対して

A: 正則 $\iff \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right) \iff |A| \neq 0$

A: 正則でない $\iff \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \wedge A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$

$\iff |A| = 0$

ここで行列式について補足をしておく。

定理 | $A, B \in M_2(\mathbb{K})$ に対して $|AB| = |A| \cdot |B|$

$A = (\vec{a_1}\ \vec{a_2})$, $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ とすると

$AB = (x_1\vec{a_1} + y_1\vec{a_2}\quad x_2\vec{a_1} + y_2\vec{a_2})$ であることを用いると

$$|AB| = |x_1\vec{a_1} + y_1\vec{a_2}\quad x_2\vec{a_1} + y_2\vec{a_2}|$$

$$= x_1 |\vec{a_1}\quad x_2\vec{a_1} + y_2\vec{a_2}| + y_1 |\vec{a_2}\quad x_2\vec{a_1} + y_2\vec{a_2}|$$

P13の線型性

$|\vec{a}\ \vec{b}| = |\vec{a}\ \ \lambda\vec{a} + \vec{b}|$
$|\vec{a}\ \vec{b}| = |\lambda\vec{b} + \vec{a}\ \ \vec{b}|$

$$= x_1 |\vec{a_1}\quad y_2\vec{a_2}| + y_1 |\vec{a_2}\quad x_2\vec{a_1}|$$

$$= x_1 y_2 |\vec{a_1}\ \vec{a_2}| + y_1 x_2 |\vec{a_2}\ \vec{a_1}|$$

$$= x_1 y_2 |\vec{a_1}\ \vec{a_2}| - y_1 x_2 |\vec{a_1}\ \vec{a_2}|$$

$$= |\vec{a_1}\ \vec{a_2}| (x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

$$= |A| \cdot |B|$$

これを用いると「Aが正則 $\Rightarrow |A| \neq 0$」が従う(別証明)

実際 $1 = |I_2| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$ から従う。

3行3列の行列 $A \in M_3(\mathbb{K})$ について考えます.

定義 A が正則とは ある $X \in M_3(\mathbb{K})$ が存在し

$$AX = XA = I_3$$

が成立するときです. X を A の逆行列と呼びます.

定理 $\underbrace{X, Y \in M_3(\mathbb{K})}$ が A の逆行列 $\Rightarrow X = Y$

（A が正則であるとします.）

仮定から $AX = XA = I_3$, $AY = YA = I_3$ が成立します.

$$X = XI_3 = X(AY) \underset{\text{結合則}}{=} (XA)Y = I_3 Y = Y$$

から $X = Y$ が従います.

定理によって A が正則であるとき A の逆行列を A^{-1} と記します.

問題 $\overbrace{A, B}^{\in M_3(\mathbb{K})}$ が正則とします. AB, A^{-1} が正則であることを示しましょう.

以下は A が正則である条件と計算法についてです.

前^{2}ページの定理ですが $A \in M_3(\mathbb{K})$ としても成立します.

<u>定理</u> $A \in M_3(\mathbb{K})$ に対して

(i) A: 正則 i.e. $\exists X \in M_3(\mathbb{K})$ $AX = XA = I_3$

(ii) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ i.e. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は LI

(iii) $|A| \neq 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) ⊛ $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ とします. (i)から $XA = AX = I_3$ を満たす $X \in M_3(\mathbb{K})$ が存在しますから. X を ⊛ の左からかけると

$$\text{左} = X\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{結合則}}}{=} (AX)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = I_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{右} = X\vec{0} = 0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + 0\vec{x}_3 = \vec{0}$$

から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ が従います.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (iii)</u> これは以下から従います. すなわち (ii) の下で

$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ なる行基本変形が存在します.
これを用いると

$$|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| = c\,|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3| = c \cdot 1 = c \neq 0$$

となります. (3種類の行基本変形により行列式がどう変わるか確認しましょう).

(ii) ⇒ (i)　(ii) から $(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ である

行基本変形が存在します. これから $\forall \vec{e} \in \mathbb{K}^3$ に対し

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3 \mid \vec{e}) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3 \mid \vec{c})$$

となる $\vec{c}$ が存在することが分かります. これは

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{e} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{c}$$

を意味します.

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3 \mid \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3 \mid \vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \vec{c}_3)$$

と行基本変形をすると

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)(\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \vec{c}_3) = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$$

から

$$AC = I_3$$

が分かります. $CA = I_3$ を示すと証明が終了します.

考え方　① 行基本変形の逆は行基本変形!

② 行基本変形と列の交換は可換!

なので

$$(\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \vec{c}_3 \mid \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3 \mid \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$$

となる行基本変形が存在します. これは

$$CA = I_3$$

を意味します.

(iii) ⇒ (ii)　(以下は3次行列式に関する補足の後に解説)

クラメールの公式を用いると　$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ が　$|A| \neq 0$ を満たすとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{|A|}\,|\vec{b}\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| \\ y = \dfrac{1}{|A|}\,|\vec{a}_1\ \vec{b}\ \vec{a}_3| \\ z = \dfrac{1}{|A|}\,|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{b}| \end{cases}$$

1列の展開

特に $\vec{b} = \vec{0}$ のとき　$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Longrightarrow$

$$x = \frac{1}{|A|}\,|\vec{0}\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| = 0$$

$$y = \frac{1}{|A|}\,|\vec{a}_1\ \vec{0}\ \vec{a}_3| = 0$$

$$z = \frac{1}{|A|}\,|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{0}| = 0$$

2,3列の展開

(iii) ⇒ (i)　((iii) ⇒ (ii) と同様)

Aの余因子行列を $\tilde{A}$ とすると

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_3$$

$|A| \neq 0$ から両辺を $\frac{1}{|A|}$ 倍すると

$$A\left(\frac{1}{|A|}A\right) = \left(\frac{1}{|A|}A\right)A = I_3$$

注　$A, B \in M_3(\mathbb{K})$ に対して

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

補足（(ii) ⇒ (iii) の別証明）

> 対偶 $|A| = 0 \Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$
>
> i.e. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は LD.

を示します。$\vec{a}_1 = \vec{0}$ のとき $1 \cdot \vec{0} + 0\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 = \vec{0}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ から、定理の主張は成立します。以下 $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ とします。

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{b}\ \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

行基本変形で行列式は $\neq 0$ の定数倍に変化しますから $\exists c \neq 0$ に対して

$$0 = |\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| = c \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

が成立するので $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ が分かります。

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ b_2 y + c_2 z = 0 \\ b_3 y + c_3 z = 0 \end{cases}$$

において $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ から $\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が $\begin{cases} b_2 y_0 + c_2 z_0 = 0 \\ b_3 y_0 + c_3 z_0 = 0 \end{cases}$

を満たします。さらに

$$x_0 := -b_1 y_0 - c_1 z_0$$

とすると $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ で $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ を満たすことが分かります。