正則性（補足）

$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して

(1) A は正則 $\left(\iff \exists X \in M_n(\mathbb{K})\ \ AX = XA = I_n\right)$

$\Updownarrow$

(2) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ ($\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ は LI)

(1) $\Rightarrow$ (2) は簡単.

(2) $\Rightarrow$ (1) について解説する.

(2) $\iff$「$A \to \cdots \to I_n$ と行基本変形できる」

はすでに示している. $\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$(A \mid \vec{v}) \to \cdots \to (I_n \mid \vec{w})$$

と計算すると

$$A\vec{x} = \vec{v} \iff \vec{x} = \vec{w}$$

であることを示している. 従って <u>(2) の下で</u>

$$\boxed{\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n\ \ \exists \vec{w} \in \mathbb{K}^n \qquad A\vec{v} = \vec{w}}$$

$\vec{v} = \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ とすると $\exists X \in M_n(\mathbb{K})$

$$AX = I_n$$

であることが分かる.

$$\boxed{\text{定理}\quad (2) \Rightarrow \exists X \in M_n(\mathbb{K}) \quad AX = I_n}$$

このとき $X = (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_n)$ とすると

$$\vec{0} = c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_n\vec{x}_n = X\vec{c}$$

とすると両辺に A を左からかけると

$\vec{0} = A\vec{0} = AX\vec{c} = I_n\vec{c} = \vec{c}$. よって

$$X\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = 0$$ すなわち X は (2) を満たす.

定理 を用いると $\exists Y \in M_n(\mathbb{K})$

$$XY = I_n$$

が従う. $\underline{AX = I_n,\ XY = I_n \text{ から } Y = A \text{ が従う}}$. 実際

$$AX = I_n \rightsquigarrow AXY = I_n Y = Y$$
$$AXY = A \cdot I_n = A$$

から分かる.

$$(A \mid I_n) \to \cdots \to (I_n \mid X) \Longleftrightarrow AX = I_n$$

逆が

$$(I_n \mid X) \to \cdots \to (A \mid I_n)$$

より を交換して

$$(X \mid I_n) \to \cdots \to (I_n \mid A) \Longleftrightarrow XA = I_n$$

とこのように示すこともできる.