# 行列の積

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{K}^m$ とする.

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \iff \left( x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow x = y = 0 \right)$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は LI} \iff \left( x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow x = y = z = 0 \right)$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \text{ は LI} \iff \left( x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + w\vec{d} = \vec{0} \Rightarrow x = y = z = w = 0 \right)$$

このことを念頭に

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \longleftarrow \in \mathbb{K}^m$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + w\vec{d}$$

と定義する. <u>行列×行列</u>を $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$・行列で考えよう.

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} := \left( (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right)$$

m行2列となる.

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

$$:= \left( (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right)$$

m行3列となる.

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k & \cdots & x_\ell \\ y_1 & \cdots & y_k & \cdots & y_\ell \\ z_1 & & z_k & & z_\ell \end{pmatrix}$$

$$:= \left( (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdots (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} \cdots (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_\ell \\ y_\ell \\ z_\ell \end{pmatrix} \right)$$

m行ℓ列となる.

**まとめ**　$A$ m行3列, $B = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_l)$ 3行$l$列

とすると　　　　( $\vec{b}_j \in \mathbb{K}^3$ ということ )

$$AB = (A\vec{b}_1 \cdots A\vec{b}_l)$$

$A\vec{b}_j \in \mathbb{K}^m$ なので　m行$l$列となる.

---

$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$　m行3列とする ( $\vec{a}_j \in \mathbb{K}^m$ ということ )

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^3$ に対して

**命題**　$A\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$　(i)

$A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x})$　(ii)

---

**証明** (i)

$$(\text{左辺}) = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1+y_1)\vec{a}_1 + (x_2+y_2)\vec{a}_2 + (x_3+y_3)\vec{a}_3$$

$$= x_1\vec{a}_1 + y_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + y_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + y_3\vec{a}_3$$

$$= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + y_3\vec{a}_3$$

$$= (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\text{右辺})$$

(ii)

$$(\text{左辺}) = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda x_1)\vec{a}_1 + (\lambda x_2)\vec{a}_2 + (\lambda x_3)\vec{a}_3$$

$$= \lambda(x_1\vec{a}_1) + \lambda(x_2\vec{a}_2) + \lambda(x_3\vec{a}_3)$$

$$= \lambda(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3) = \lambda\left((\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (\text{右辺})$$

公式(示) $A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda(A\vec{x})+\mu(A\vec{y})$

(証明) $(左) = A(\lambda\vec{x}) + A(\mu\vec{y}) = \lambda(A\vec{x})+\mu(A\vec{y})$

注 この記号で $\lambda A = (\lambda\vec{a}_1\ \lambda\vec{a}_2\ \lambda\vec{a}_3)$ と定めると

$$(\lambda A)\vec{x} \underset{(1)}{=} \lambda(A\vec{x}) \underset{(2)}{=} A(\lambda\vec{x})$$

(2)は(ii)に他ならない.

$$\begin{aligned}
(\lambda A)\vec{x} &= (\lambda\vec{a}_1\ \lambda\vec{a}_2\ \lambda\vec{a}_3)\,\vec{x} \\
&= x_1(\lambda\vec{a}_1)+x_2(\lambda\vec{a}_2)+x_3(\lambda\vec{a}_3) \\
&= \lambda(x_1\vec{a}_1)+\lambda(x_2\vec{a}_2)+\lambda(x_3\vec{a}_3) \\
&= \lambda(x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+x_3\vec{a}_3) \\
&= \lambda\left((\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = \lambda(A\vec{x})
\end{aligned}$$

これがあるので $(\lambda A)\vec{x}$, $\lambda(A\vec{x})$, $A(\lambda\vec{x})$ のかっこは不要.

さらに Bが3行3列とするとき($B=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ とする)

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$

$$\begin{aligned}
(\lambda A)B &= \left((\lambda A)\vec{e}_1\ \ (\lambda A)\vec{e}_2\ \ (\lambda A)\vec{e}_3\right) \\
&= \left(\lambda(A\vec{e}_1)\ \ \lambda(A\vec{e}_2)\ \ \lambda(A\vec{e}_3)\right) = (*) \\
&= \lambda(A\vec{e}_1\ \ A\vec{e}_2\ \ A\vec{e}_3) = \lambda(AB)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \left(A(\lambda\vec{e}_1)\ \ A(\lambda\vec{e}_2)\ \ A(\lambda\vec{e}_3)\right) \\
&= A(\lambda\vec{e}_1\ \ \lambda\vec{e}_2\ \ \lambda\vec{e}_3) = A(\lambda B)
\end{aligned}$$

と示せます.

**定理** $A$ : $m$行3列, $B$ : 3行3列, $\vec{x} \in \mathbb{K}^3$ のとき

$$A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$$

---

$$A(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = A\vec{e}_1 + A\vec{e}_2 + A\vec{e}_3$$ となる (各自示せ)

$$= A(x_1\vec{e}_1) + A(x_2\vec{e}_2) + A(x_3\vec{e}_3)$$

$$\text{左} = A(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1 A\vec{e}_1 + x_2 A\vec{e}_2 + x_3 A\vec{e}_3$$

$$= (A\vec{e}_1\ A\vec{e}_2\ A\vec{e}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (AB)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

**定理** $A$ : $m$行3列, $B$ 3行3列, $C$ : 3行3列 とするとき

$$(AB)C = A(BC)$$

(証明)

$$\text{右} = A(B\vec{c}_1\ \ B\vec{c}_2\ \ B\vec{c}_3)$$

$$= (A(B\vec{c}_1)\ \ A(B\vec{c}_2)\ \ A(B\vec{c}_3))$$

$$= ((AB)\vec{c}_1\ \ (AB)\vec{c}_2\ \ (AB)\vec{c}_3)$$

$$= (AB)(\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \vec{c}_3) = (AB)C = \text{左}$$