2 次正方行列の正則性　L01 10/04

2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して $\exists X \in M_2(\mathbf{R})$ が存在して

$$AX = XA = I_2 \tag{1}$$

が成立するとき A は正則であるといいます．X については一意性，すなわち

$$AX = XA = I_2, \quad AY = YA = I_2 \quad \Rightarrow X = Y \tag{2}$$

が成立して，$X = A^{-1}$ と記して A の**逆行列**と呼びます．

演習 1　(1) を示しましょう．行列の積の結合法則（Associative Law）を用いることを意識してください．

2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ が正則であることの言い換えはいろいろありますが次の定理 1 が基本です．（3 次正方行列に対して同等の定理を理解するのは大事であるが，それは数週間後に復習する予定です．）

定理 1　$A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して次の (1), (2), (3) は同値です．
(i) A は正則である．
(ii) $A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$
(iii) $|A| \neq 0$

定理 1 の証明に入る前に条件 (ii) について言い換えておきます．$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)$ と A を列ベクトル表示すると

$$A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2$$

なので

$$(ii) \Leftrightarrow \left(x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 = \vec{0} \Rightarrow x = y = 0\right)$$

と言い換えることができます．従って

$$(ii) \Leftrightarrow (ii)' \quad A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) \quad \text{とすると} \quad \vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$$

であること，すなわち A が正則であることと 2 本の列ベクトルが平行でないことと同値であることが分かります．

定理 1 の証明を始めましょう．

$\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$ A が正則であるとします．

$$A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

のとき，この両辺に A^{-1} を掛けると

$$A^{-1}A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

となり $A^{-1}A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = I_2\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ から $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$ すなわち (ii) が従います．

注意 $(i) \Rightarrow (ii)$ の対偶 (contraposition) は

$$\left(\exists\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0} \text{が} A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \text{を満たす}\right) \Rightarrow A \text{は正則でない}$$

となります．ここで

$$(\vec{0}\ \vec{a}_2)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_2 = \vec{0}$$
$$(\vec{a}_1\ \vec{0})\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

から $(\vec{0}\ \vec{a}_2)$, $(\vec{a}_1\ \vec{0})$ は正則でないことが分かります．従って

$$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\text{が正則} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_1 \neq \vec{0}, \quad \vec{a}_2 \neq \vec{0}$$

であること，すなわち正則である $A \in M_2(\mathbf{R})$ の列ベクトルは $\vec{0}$ となり得ないことが分かります．

<u>$(ii) \Rightarrow (iii)$</u> $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ と成分表示をすると A の**余因子行列** $\tilde{A}$ は

$$\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$$

と定義され

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_2 \tag{3}$$

が成立します．

演習 2 (3) を具体的に計算して示しましょう．

余因子行列のこの性質を用いて $(ii) \Rightarrow (iii)$ の対偶 $NOT(iii) \Rightarrow NOT(ii)$ すなわち

$$|A| = 0 \quad \Rightarrow \left(\exists \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0} \quad A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}\right)$$

を示します．$|A| = 0$ であるとすると

$$A\tilde{A} = 0 \cdot I_2 = O_2$$

従って

$$A\left(\begin{smallmatrix} d \\ -c \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}, \quad A\left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

が成立します．

$$d \neq 0 \text{ OR } c \neq 0 \quad \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} d \\ -c \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$
$$b \neq 0 \text{ OR } a \neq 0 \quad \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

なので

$$a \neq 0 \text{ OR } b \neq 0 \text{ OR } c \neq 0 \text{ OR } d \neq 0 \tag{4}$$

であるとき

$$\exists \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \text{に対して} \quad \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0}, \text{ かつ } A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \quad \text{が成立する}$$

ことが分かりました．条件 (4) を否定した

$$a = b = c = d = 0$$

のときは

$$A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = O_2\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

なので $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0}$ を満たすすべての $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^2$ が $A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$ を満たします．

<u>$(iii) \Rightarrow (i)$</u> $|A| \neq 0$ とします．このとき余因子行列の性質 (3) すなわち

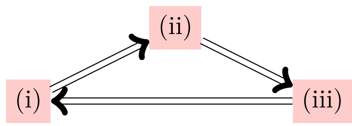
$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_2$$

の各辺を $\frac{1}{|A|}$ 倍すると

$$A\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right) = \left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)A = I_2$$

から A は正則であることが分かります．正則行列の定義 (1) において $X = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$ とします．

注意（定理 1 の証明の進行について）
以上で証明したことから，右図を参照すれば条件 (i),(ii),(iii) のいずれからも別の条件を導くことが分かります．従って定理 1 は論理的には証明されました．以下は復習を兼ねて，別の経路で導くことを説明します．



$(i) \Rightarrow (iii)$ 2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ が正則であるとき

$$A \cdot A^{-1} = I_2$$

が成立します．ここで両辺の行列式を考えると

$$|A \cdot \tilde{A}| = |I_2| = 1, \quad |A \cdot \tilde{A}| = |A| \cdot |\tilde{A}|$$

から $|A| \neq 0$ が分かります.

$$\boxed{A, B \in M_2(\mathbf{R}) \text{ に対して } |AB| = |A| \cdot |B|}$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$　$|A| \neq 0$ とします．このとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

とするとクラメールの公式によって

$$x = \frac{1}{|A|} \cdot |\vec{0}\ \vec{a}_2| = 0, \quad x = \frac{1}{|A|} \cdot |\vec{a}_1\ \vec{0}| = 0,$$

から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ が従います.

注意　残るのは $(ii) \Rightarrow (i)$ を直接証明することですが，これも掃き出し法の一般論から示すことができます．数週間後に 3 次正方行列に対して定理 1 と同等の定理を復習するときに説明します.