補足問題

I (1) 写像 $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ が単射である

$$z \longmapsto \frac{1}{z}$$

ことを示しましょう.

(2) $f(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ を求めましょう.

(3) $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow f(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ が全単射である

ことに注意して逆写像

$$f^{-1}: f(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

を求めましょう.

II (1) $g: \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ が単射であることを

$$z \longmapsto \frac{z+1}{z-1}$$

示しましょう.

(2) $g(\mathbb{C} \setminus \{1\})$ を求めましょう.

(3) $g: \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow g(\mathbb{C} \setminus \{1\})$ が全単射

であることに注意して逆写像

$$g^{-1}: g(\mathbb{C} \setminus \{1\}) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

を求めましょう.

I (1) $z_1, z_2 \neq 0$ とします．

$$f(z_1) = f(z_2) \iff \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} \iff z_1 = z_2$$

から f は単射であることが分かります．

(2) $z \neq 0$ のとき $\frac{1}{z} \neq 0$ から

$$f(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

であることが分かります．$w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とすると

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\frac{1}{w}} = w$$

から $w \in f(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ が従います．これは $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset f(\mathbb{C} \setminus \{0\})$

を意味します．以上から

$$f(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

が分かります．

(3) $$\mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} f(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

を考えます．(1) から f は単射です．$w \in f(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ということは $w = f(z)$ を満たす $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在することです．

従ってこの f は全単射であることが分かります．

$w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して $g(w) = \frac{1}{w}$ と定めます．

$$f \circ g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\frac{1}{w}} = w = id_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}(w)$$

他方 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$g \circ f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\frac{1}{z}} = z = id_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}(z).$$

から $g \circ f = f \circ g = id_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$ となり $g = f^{-1}$ が分かります．

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \setminus \{0\}$$ から $f \circ g$ と $g \circ f$ が定義できることに注意しましょう．

注 一般に $f : X \longrightarrow Y$ に対して $f : X \longrightarrow f(X)$ が定義できて全射になります．

II (1) $z \neq 1$ に対して $w := \dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{z+1-2}{z-1} = 1 - \dfrac{2}{z-1}$

$f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z-1$ は単射です．これから $f_1 : \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}$ も単射です．

$f_1(\mathbb{C}\setminus\{1\}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ となるので $f_1 : \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ とします．

$f_2 : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ は I で示したように単射です．

$f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto (-2)z$ は単射です

$f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z+1$

$f_1 : \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $f_2 : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ はすべて単射で

$$g = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

から g が単射であることが分かりました．

（別解） $z_1, z_2 \neq 1$ とする． $g(z_1) = g(z_2) \Longleftrightarrow \dfrac{z_1+1}{z_1-1} = \dfrac{z_2+1}{z_2-1}$

$\Longleftrightarrow (z_1+1)(z_2-1) = (z_2+1)(z_1-1) \Longleftrightarrow z_2 - z_1 = z_1 - z_2$

$z_1, z_2 \neq 1$ の下で $\qquad \Longleftrightarrow z_1 = z_2$

から g が単射であることが分かります．

(2) $f_1 : \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ は全単射.

$f_2 : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ は全単射 (I で示した)

f_3 を $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に制限すると

$f_3 : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ は全単射

$f_4 : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{1\}$ は全単射

で

$$g = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 \ : \mathbb{C}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{1\}$$

は全単射となるので

$$g(\mathbb{C}\setminus\{1\}) = \mathbb{C}\setminus\{1\}$$

であることが分かります.

(3) $\left.\begin{matrix} w \neq 1 \\ z \neq 1 \end{matrix}\right)$ において $w = \dfrac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow wz - w = z + 1$

$$\Leftrightarrow (w-1)z = w+1 \Leftrightarrow z = \frac{w+1}{w-1}$$

なので

$$g^{-1} : \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}\setminus\{1\}$$
$$w \longmapsto \frac{w+1}{w-1}$$

であることが分かります.