

第4章 2次元の座標変換・2次正方行列・2変数の2次形式

4.1 座標変換

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$$

が条件

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \quad (4.1)$$

を満たしているとします. この条件は

$$D := |\vec{a} \ \vec{b}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \quad (4.2)$$

と必要十分であることはすでに証明しました. まず任意のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$ が与えられるとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{a} + \eta \vec{b}$$

と表すことを考えましょう. この条件は成分で考えると

$$\begin{cases} \xi a_1 + \eta b_1 &= x \\ \xi a_2 + \eta b_2 &= y \end{cases}$$

において (4.2) が成立するので

$$\xi = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x & b_1 \\ y & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} (x b_2 - y b_1), \quad \eta = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & x \\ a_2 & y \end{vmatrix} = \frac{1}{D} (y a_1 - x a_2)$$

とすればよいことが分かります. 以上で

$$\varphi: \mathbf{K}^2 \longrightarrow \mathbf{K}^2 \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \xi \vec{a} + \eta \vec{b}$$

が全射であることが示されました。さらにこの写像 φ は単射でもあります。そのために仮定している条件 (4.1) が

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

に他ならないことに注意しましょう。すると

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \right) = \varphi \left(\begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \right)$$

を

$$\xi_1 \vec{a} + \eta_1 \vec{b} = \xi_2 \vec{a} + \eta_2 \vec{b}$$

と読み換えると、この条件は

$$(\xi_1 - \xi_2) \vec{a} + (\eta_1 - \eta_2) \vec{b} = \vec{0}$$

に他ならないので

$$\xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2 \quad i.e. \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

が従います。以上で φ が単射でもあることが示されました。

この φ は $\vec{a}, \vec{b}$ による座標変換と呼びます。

4.2 2次正方行列

$$A = (\vec{a} \ \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

を列ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を束ねる (bundle) 2次正方行列と呼びます。A には右から2次元列ベクトルを以下のように掛けることができます。

$$A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi \vec{a} + \eta \vec{b} = \begin{pmatrix} \xi a_1 + \eta b_1 \\ \xi a_2 + \eta b_2 \end{pmatrix}$$

さらに以下の様に

$$C = (\vec{c} \ \vec{d}) = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

を A に掛けることができます。

$$AC = (A\vec{c} \ A\vec{d}) = (c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} \ d_1 \vec{a} + d_2 \vec{b})$$

このように

$$2 \text{ 次正方行列} \times 2 \text{ 次正方行列} = 2 \text{ 次正方行列}$$

となることが分かります。ここで

$$M_2(\mathbf{K}) := \{A : \mathbf{K}\text{値の2次正方行列}\}$$

と集合を定義すると、写像

$$M_2(\mathbf{K}) \times M_2(\mathbf{K}) \longrightarrow M_2(\mathbf{K}) \quad (A, C) \mapsto AC$$

が定まります。

行列の積について基本的な性質を説明していきます。

定理 4.1. $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{K}^2$ に対して

$$A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w}, \quad A(\lambda\vec{v}) = \lambda(A\vec{v})$$

が成立します。

Proof.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} A(\vec{v} + \vec{w}) &= (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = (v_1 + w_1)\vec{a} + (v_2 + w_2)\vec{b} \\ &= (v_1\vec{a} + v_2\vec{b}) + (w_1\vec{a} + w_2\vec{b}) = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= A\vec{v} + A\vec{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\lambda\vec{v}) &= A \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} = (\lambda v_1)\vec{a} + (\lambda v_2)\vec{b} \\ &= \lambda(v_1\vec{a} + v_2\vec{b}) = \lambda(A\vec{v}) \end{aligned}$$

□

系 4.1.

$$A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda A\vec{v} + \mu A\vec{w}$$

この系を用いると写像

$$\varphi : \mathbf{K}^2 \longrightarrow \mathbf{K}^2 \quad \vec{v} \mapsto A\vec{v}$$

は

$$\varphi(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\varphi(\vec{v}) + \mu\varphi(\vec{w})$$

を満たすことが従います. これを行列 A が定める写像 φ の線型性と呼びます.

行列の積についてはいくつかの性質を学ぶ必要がありますが, 次の結合則が大事です.

定理 4.2. (1)

$$(AC)\vec{v} = A(C\vec{v})$$

(2) $F \in M_2(\mathbf{K})$ とすると

$$(AC)F = A(CF)$$

Proof. (1)

$$\begin{aligned} A(C\vec{v}) &= A(v_1\vec{c} + v_2\vec{d}) \\ &= v_1A\vec{c} + v_2A\vec{d} \\ &= (A\vec{c} \ A\vec{d}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (AC)\vec{v} \end{aligned}$$

(2) $F = (\vec{f}_1 \ \vec{f}_2)$ と F を列ベクトルで表現すると

$$\begin{aligned} (AC)F &= ((AC)\vec{f}_1 \ (AC)\vec{f}_2) = (A(C\vec{f}_1) \ A(C\vec{f}_2)) \\ &= A(C\vec{f}_1 \ C\vec{f}_2) = A(CF) \end{aligned}$$

と証明されます. □

続いて2次正方行列の和とスカラー倍を

$$A + C = (\vec{a} \ \vec{b}) + (\vec{c} \ \vec{d}) = (\vec{a} + \vec{c} \ \vec{b} + \vec{d}) = \begin{pmatrix} a_1 + c_1 & b_1 + d_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \lambda(\vec{a} \ \vec{b}) = (\lambda\vec{a} \ \lambda\vec{b}) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 \end{pmatrix}$$

と定義します.

最後に特殊な行列をいくつか定義します. すなわち

$$O_2 = (\vec{0} \ \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をそれぞれ零行列, 単位行列と呼びます. $A \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$AO_2 = O_2A = O_2, \quad A + O_2 = O_2 + A = A$$

$$AI_2 = I_2A = A$$

が成立します. 零行列に関する等式は明らかでしょう. 単位行列については

$$A\vec{e}_1 = (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0\vec{b} = \vec{a}$$

$$A\vec{e}_2 = (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1\vec{b} = \vec{b}$$

より

$$AI_2 = (A\vec{e}_1 \ A\vec{e}_2) = (\vec{a} \ \vec{b}) = A$$

が従います. また

$$I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

から任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^2$ に対して

$$I_2\vec{v} = \vec{v}$$

が従います. そして

$$I_2A = I_2(\vec{a} \ \vec{b}) = (I_2\vec{a} \ I_2\vec{b}) = (\vec{a} \ \vec{b}) = A$$

が分かります.

4.3 行列の正則性

2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$AX = XA = I_2$$

を満たす $X \in M_2(\mathbf{K})$ が存在するとき A は**正則**と呼びます. このときこの条件を満たす X は唯一つ存在します. 実際 $X, Y \in M_2(\mathbf{K})$ が

$$AX = XA = I_2, \quad AY = YA = I_2$$

を満たすとする. $AX = I_2$ の両辺に左から Y を掛けると

$$Y(AX) = YI_2 = Y$$

$$Y(AX) = (YA)X = I_2X = X$$

から $X = Y$ が従います. この X を A の逆行列と呼び A^{-1} と記します.

ここで

$$|A| = ad - bc \neq 0$$

を仮定します. このとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix}$$

から

$$X = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

と定めると

$$AX = XA = I_2$$

が従います. よって次の定理を証明しました.

定理 4.3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ が $|A| = ad - bc \neq 0$ を満たすならば A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となります.

実はこの定理 4.3 の逆が成立します.

定理 4.4. $A \in M_2(\mathbf{K})$ が正則ならば $|A| \neq 0$ が成立します.

Proof. A が正則であるとして.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$$

が成立するとして. この両辺に A^{-1} を掛けると

$$A^{-1} \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = A^{-1} \vec{0} = \vec{0}$$

$$A^{-1} \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となります. これは $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ であることを意味しますから

$$|\vec{a} \vec{b}| \neq 0$$

が従います. □

以上を求めると以下の定理が成立します.

定理 4.5. $A \in M_2(\mathbf{K})$ に対して以下は同値です.

(1) A は正則である.

(2) $|A| \neq 0$

(3) $A\vec{v} = \vec{0} \rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

(3)' $A = (\vec{a} \vec{b})$ とすると $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

(4) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ と行ベクトルを定めると $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$

(5) 写像

$$\varphi: \mathbf{K}^2 \longrightarrow \mathbf{K}^2$$

は全射である.

この定理において (5) $\Rightarrow$ (2) は演習 VIII で考えてもらいます.

4.4 2次正方行列再論

4.4.1 行ベクトルと転置作用素

$\mathbf{K}$ に値をとる n 次元ベクトル

$$\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

も必要となります. その全体がなす集合を $(\mathbf{K}^n)^*$ と表します. さらに

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$$

が与えられたとき, $\mathbf{a}$ と $\vec{b}$ の積を

$$\mathbf{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \in \mathbf{K}$$

を定義できます. 列ベクトルを行ベクトルに, 行ベクトルを列ベクトルにする**転置作用素**を

$$(\cdot)^t : \mathbf{K}^n \longrightarrow (\mathbf{K}^n)^* \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)$$

$$(\cdot)^t : (\mathbf{K}^n)^* \longrightarrow \mathbf{K}^n \quad \mapsto (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と定義します.

$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ のときに

$$(\vec{a}, \vec{b}) = {}^t\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \quad (4.3)$$

が成立することに関連して応用上重要になります.

4.4.2 行列の行ベクトル表示

2本の2次元列ベクトル

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$$

を束ねた行列

$$A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$$

に対して

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11} \ a_{12}), \mathbf{a}_2 = (a_{21} \ a_{22})$$

をそれぞれ A の第1行, 第2行と呼びます.

行列 A に

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

を掛けると

$$A\vec{v} = v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} v_1a_{11} + v_2a_{12} \\ v_1a_{21} + v_2a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{v} \\ \mathbf{a}_2\vec{v} \end{pmatrix}$$

と A の行ベクトルと $\vec{v}$ の積によって成分が表現されます.

さらに

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$$

を束ねた行列

$$B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$$

を右から A に掛けると

$$AB = (A\vec{b}_1 \ A\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{b}_1 & \mathbf{a}_1\vec{b}_2 \\ \mathbf{a}_2\vec{b}_1 & \mathbf{a}_2\vec{b}_2 \end{pmatrix}$$

と成分が A の行ベクトルと B の列ベクトルの積で表されます。

4.5 行列の演算について

4.5.1 ベクトルの演算の性質（復習）

ベクトルの足し算とスカラー倍に関する基本的な定理 4.6 を述べましょう。

定理 4.6. (1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (4.4)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (4.5)$$

が成立します。

(2) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^n$ と $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ に対して

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \quad (4.6)$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \quad (4.7)$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \quad (4.8)$$

が成立します。

4.5.2 行列の和・差とスカラー倍

以下では 2 次正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

と成分表示, 列ベクトル表示, 行ベクトル表示をして考えます. このとき A と B の和と差を

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \ \vec{a}_2 + \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 - \vec{b}_1 \ \vec{a}_2 - \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

と定義します. さらに $\lambda \in \mathbf{K}$ に対して A の λ 倍を

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} = (\lambda \vec{a}_1 \ \lambda \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{a}_1 \\ \lambda \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

と定義します. 行列の和・差とスカラー倍については次の定理 4.7 が成立します.

定理 4.7. 2次正方行列 A, B, C に対して, 以下が成立します.

(1) $A + B = B + A$

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

(4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Proof. (1)

$$A + B = (\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \ \vec{a}_2 + \vec{b}_2) = (\vec{b}_1 + \vec{a}_1 \ \vec{b}_2 + \vec{a}_2) = B + A$$

(2) $C = (\vec{c}_1 \ \vec{c}_2)$ と列ベクトル表示をします.

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= ((\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + \vec{c}_1 \ (\vec{a}_2 + \vec{b}_2) + \vec{c}_2) \\ &= (\vec{a}_1 + (\vec{b}_1 + \vec{c}_1) \ \vec{a}_2 + (\vec{b}_2 + \vec{c}_2)) = A + (B + C) \end{aligned}$$

(3)

$$\lambda(\mu A) = \lambda(\mu \vec{a}_1 \ \mu \vec{a}_2) = (\lambda(\mu \vec{a}_1) \ \lambda(\mu \vec{a}_2)) = ((\lambda\mu)\vec{a}_1 \ (\lambda\mu)\vec{a}_2) = (\lambda\mu)A$$

(4)

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)A &= ((\lambda + \mu)\vec{a}_1 \ (\lambda + \mu)\vec{a}_2) = (\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_1 \ \lambda \vec{a}_2 + \mu \vec{a}_2) \\ &= (\lambda \vec{a}_1 \ \lambda \vec{a}_2) + (\mu \vec{a}_1 \ \mu \vec{a}_2) = \lambda A + \mu A \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda(\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \ \vec{a}_2 + \vec{b}_2) = (\lambda(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \ \lambda(\vec{a}_2 + \vec{b}_2)) = (\lambda \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1 \ \lambda \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2) \\ &= (\lambda \vec{a}_1 \ \lambda \vec{a}_2) + (\lambda \vec{b}_1 \ \lambda \vec{b}_2) = \lambda A + \lambda B \end{aligned}$$

□

4.5.3 行列の積の性質

定理 4.8. A, B, X, Y, Q は 2 次正方行列とします. このとき次が成立します.

- (1) $(A + B)X = AX + BX$
- (2) $A(X + Y) = AX + AY$
- (3) $A(\alpha X) = (\alpha A)X = \alpha(AX)$
- (4) (結合法則) $(AX)Q = A(XQ)$

Proof. 証明の準備として $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$(A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} \quad (4.14)$$

が成立することを示します. 実際

$$\begin{aligned} (A + B)\vec{x} &= \begin{pmatrix} \vec{a}_1 + \vec{b}_1 & \vec{a}_2 + \vec{b}_2 \end{pmatrix} \vec{x} \\ &= x_1(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + x_2(\vec{a}_2 + \vec{b}_2) \\ &= x_1\vec{a}_1 + x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_2\vec{b}_2 \\ &= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 = A\vec{x} + B\vec{x} \end{aligned}$$

から分かります. さらに

$$A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) = (\lambda A)\vec{x} \quad (4.15)$$

が成立します. 実際, 定理 4.8(3) で最初の等号は示しています. 2 番目の等式は

$$\begin{aligned} (\lambda A)\vec{x} &= (\lambda\vec{a}_1 \quad \lambda\vec{a}_2) \vec{x} \\ &= x_1(\lambda\vec{a}_1) + x_2(\lambda\vec{a}_2) \\ &= \lambda x_1\vec{a}_1 + \lambda x_2\vec{a}_2 = \lambda(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2) \\ &= \lambda(A\vec{x}) \end{aligned}$$

と証明できます.

(1) $X = (\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2)$ と X を列ベクトル表示すると

$$\begin{aligned} (A + B)X &= ((A + B)\vec{x}_1 \quad (A + B)\vec{x}_2) = (A\vec{x}_1 + B\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 + B\vec{x}_2) \\ &= (A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2) + (B\vec{x}_1 \quad B\vec{x}_2) = AX + BX \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} A(X + Y) &= A(\vec{x}_1 + \vec{y}_1 \quad \vec{x}_2 + \vec{y}_2) \\ &= (A(\vec{x}_1 + \vec{y}_1) \quad A(\vec{x}_2 + \vec{y}_2)) \\ &= (A\vec{x}_1 + A\vec{y}_1 \quad A\vec{x}_2 + A\vec{y}_2) \\ &= (A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2) + (A\vec{y}_1 \quad A\vec{y}_2) = AX + AY \end{aligned}$$

(3) 示すべき等式は

$$(A(\lambda \vec{x}_1) \ A(\lambda \vec{x}_2)) = ((\lambda A) \vec{x}_1 \ (\lambda A) \vec{x}_2) = \lambda (A \vec{x}_1 \ A \vec{x}_2)$$

となりますが, この各列が等しいのは (4.15) から従います.

(4) すでに定理 4.2 で証明しています. □

4.6 転置行列

$$A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$$

に対して転置行列を

$${}^t A = ({}^t \mathbf{a}_1 \ {}^t \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} {}^t \vec{a}_1 \\ {}^t \vec{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$$

として定義します.

応用上は $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ のときに, すなわち $A \in M_2(\mathbf{R})$ のときに

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^t A\vec{w}) \quad (4.16)$$

が成立することが重要となります. この等式の証明は演習 II とします.

4.7 2変数の2次関数

平面の座標を (x, y) として, (x, y) の2次式

$$ax^2 + 2cxy + by^2 + dx + ey + f = 0 \quad (4.17)$$

を考えます. この2次関数を平行移動座標変換で簡単な形のものに変換することを考えます. 2次の項がない場合は考える必要はないですから

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \neq O_2$$

を仮定します. また

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

と定めます. このとき

$$\begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} ax + cy \\ cx + by \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= x(ax + cy) + y(cx + by) = ax^2 + 2cxy + by^2 \end{aligned}$$

となりますから, (4.17) は

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + f = 0$$

と表現できます.

ここでは1次の項を平行移動座標変換で消すことができるか考えます. すなわち

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換を考えます. 簡単のため

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

として

$$\begin{aligned} z &= \left(A \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + f \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) + 2 \left(A \vec{\alpha}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) + (A \vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f \\ &= \left(A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) + \left(2A \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) + (A \vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f \end{aligned}$$

となります¹. ここで条件

$$|A| = \begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c^2 \neq 0 \quad (4.18)$$

を仮定します. このとき

$$\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{\beta}$$

¹ここで (*) において ${}^tA = A$ であることを用いて

$$\left(A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, {}^tA \vec{\alpha} \right) = \left(A \vec{\alpha}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right)$$

と変形しています.

と定義することができ,

$$A\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta} = \vec{0}$$

が成立します. 従って (ξ, η) 座標では

$$z = \left(A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f$$

と1次の項を消すことができます. 定数項は

$$\begin{aligned} & (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f \\ &= \left(-\frac{1}{2}\vec{\beta}, \vec{\alpha}\right) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f = \frac{1}{2}(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f \end{aligned}$$

と簡単にできます.

演習問題

I 次の行列の積を計算しましょう.

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してその転置行列を ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ によって定義します. $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が成立することを示しましょう.

III (1) 座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

によって

$$z = x^2 + xy + y^2 - x - 2y$$

を ξ, η で表しましょう.

(2) (1) を用いて z の最小値を求めましょう.

IV

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y$$

に対して, 平行移動の座標変換を用いて1次の項のない形にしましょう.

V 次の行列の逆行列を求めましょう.

$$(1) A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad (4) A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (7) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

VI

$$z = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32$$

に対して, 平行移動の座標変換を用いて1次の項のない形にしましょう.

VII $a > 0, ab - c^2 > 0$ のとき

$$ax^2 + 2cxy + by^2 > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

が成立することを示しましょう.

VIII $A = (\vec{a} \ \vec{b})$ は2次正方行列であるとしします.

$$\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が全射とします. このとき $|A| = |\vec{a} \ \vec{b}| \neq 0$ が成立することを証明しましょう.

I 次の行列の積を計算しましょう.

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解答

(1)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x + y \end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 + b_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a} \ \lambda \vec{a} + \vec{b})$$

(10)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda \vec{a} \ \vec{b})$$

(11)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b} \ \vec{a})$$

II $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してその転置行列を ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ によって定義します. $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\vec{\alpha} \ \vec{\beta}), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{w}) &= (x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}, \vec{w}) = x(\vec{\alpha}, \vec{w}) + y(\vec{\beta}, \vec{w}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

となる. 他方

$${}^tA\vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha} \\ {}^t\vec{\beta} \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha}\vec{w} \\ {}^t\vec{\beta}\vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix}$$

から

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tA\vec{w} \right) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が従います.

III (1) 座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

によって

$$z = x^2 + xy + y^2 - x - 2y$$

を ξ, η で表しましょう.

(2) (1) を用いて z の最小値を求めましょう.

解答

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \end{cases}$$

から

$$x + y = \sqrt{2}\xi, \quad xy = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$$

となります. 従って

$$\begin{aligned} z &= (x + y)^2 - xy - x - 2y \\ &= 2\xi^2 - \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \\ &= \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\eta \\ &= \frac{3}{2}\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{2}\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

から $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, すなわち $x = 0, y = 1$ のとき z は最小値 -1 をとります.

IV

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y$$

に対して、平行移動の座標変換を用いて1次の項のない形にしましょう.

解答 $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

と展開できます. ここで

$$\left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

となります. ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) &= \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right) = -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

から

$$z = \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - \frac{7}{3}$$

となります.

V 次の行列の逆行列を求めましょう.

$$(1) A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (7) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

解答

$$(1) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

となります.

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \lambda \cdot 0 = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \lambda = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(7) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります.

VI

$$z = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32$$

に対して、平行移動の座標変換を用いて1次の項のない形にしましょう.

解答 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + 32$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + 32 \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \end{aligned}$$

と展開できます. ここで

$$\left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \end{aligned}$$

となります. ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 &= \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + 32 = -6 \end{aligned}$$

から

$$z = \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) - 6$$

となります.

VII $a > 0, ab - c^2 > 0$ のとき

$$ax^2 + 2cxy + by^2 > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2$$

となります. ここで $a > 0, ab - c^2 > 0$ から

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0$$

であることが分かります. さらにこの不等式における等号成立の必要十分条件は

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = 0, \quad \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0$$

すなわち

$$x + \frac{c}{a}y = y = 0 \quad i.e. \quad x = y = 0$$

ですから, $x \neq 0$ または $y \neq 0$ が成立するとき

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 > 0$$

となります.

VIII $A = (\vec{a} \ \vec{b})$ は2次正方行列であるとし.

$$\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が全射とします. このとき $|A| = |\vec{a} \ \vec{b}| \neq 0$ が成立することを証明しましょう.

解答 主張の対偶, すなわち $|A| = |\vec{a} \ \vec{b}| = 0$ ならば φ が全射でないことを証明します. もし $A = O_2$ ならば $\text{Im}(\varphi) = \{\vec{0}\}$ となりますから, φ は全射でないことが分かります. 以下では $A \neq O_2$ であると仮定します. $|\vec{a} \ \vec{b}| = 0$ から $\vec{a} \parallel \vec{b}$ すなわち, ある $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在して

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} = \vec{0}$$

が成立します. 以下 $c_1 \neq 0$ の場合を考えます. このとき

$$\vec{a} = -\frac{c_2}{c_1} \vec{b}$$

が成立します. もし $\vec{b} = \vec{0}$ ならば $\vec{a} = \vec{0}$ となりますから, $A = O_2$ となります. 従って $\vec{b} \neq \vec{0}$ であることが分かります. このとき $\vec{c} \neq \vec{0}$ で $\vec{b} \parallel \vec{c}$ を満たすものが存在します.

ここでもし φ が全射であるとする

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x \vec{a} + y \vec{b} = \vec{c}$$

を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ が存在します. このとき

$$\vec{c} = x \cdot \left(-\frac{c_2}{c_1} \right) \vec{b} + y \vec{b} = \left(-\frac{x c_2}{c_1} + y \right) \vec{b}$$

となりますから $\vec{b} \parallel \vec{c}$ となって矛盾が生じます. よって φ が全射ではあり得ないことが示されました.

注意 解答で証明をしないで用いたことについて注意します. $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ のとき

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = b_1 \neq 0 \quad \text{または} \quad \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix} = b_2 \neq 0$$

が成立しますから

$$\vec{e}_1 \nparallel \vec{b} \quad \text{または} \quad \vec{e}_2 \nparallel \vec{b}$$

が成立します.

2018年5月11日小テスト解答

I

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して $\|\vec{b} - t\vec{a}\|^2$ の最小値を求めましょう。

解答

$$\|\vec{a}\|^2 = 7, \quad (\vec{a}, \vec{b}) = 3, \quad \|\vec{b}\|^2 = 4$$

に注意します。これを用いると

$$\begin{aligned} \|\vec{b} - t\vec{a}\|^2 &= \|\vec{b}\|^2 - 2t(\vec{b}, \vec{a}) + t^2\|\vec{a}\|^2 \\ &= 7t^2 - 6t + 4 \\ &= 7\left(t - \frac{3}{7}\right)^2 + 4 - \frac{9}{7} \end{aligned}$$

から $t = \frac{3}{7}$ のとき最小値 $4 - \frac{9}{7} = \frac{19}{7}$ をとることが分かります。

II 以下の行列の積を計算しましょう。

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{(2)} \quad \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{(3)} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ \text{(4)} \quad & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

解答

(1)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \beta b_1 \\ \alpha a_2 & \beta b_2 \end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

2018年5月25日小テスト解答

I

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

$$L := \{x\vec{a} + y\vec{b}; x, y \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交基底を求めましょう.

解答 $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = \frac{2}{3} \vec{a}$$

と求まる. 従って $\vec{a}$ に垂直な L に属するベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る. $\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化して

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{a}\|} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が

$$\|\vec{p}\| = \|\vec{q}\| = 1, \quad (\vec{p}, \vec{q}) = 0$$

を満たす.

II 以下の2次正方行列が正則であることを示して, 逆行列を求めましょう.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4) A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答 (1) $|A| = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = -5 \neq 0$ から A は正則で

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $|A| = 5 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 6 \neq 0$ から A は正則で

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(3) $|R| = \cos \theta \cdot \cos \theta - (-\sin \theta) \cdot \sin \theta = 1 \neq 0$ から R は正則で

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(4) $|A| = 1 \cdot 1 - \lambda \cdot 0 = 1 \neq 0$ から A は正則で

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2018年5月29日小テスト問題

I 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$A^2 - (a+d)A + |A| \cdot I_2 = O_2$$

が成立することを示しましょう (Cayley-Hamilton の定理) .

解答

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = -(ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -|A| \cdot I_2 \end{aligned}$$

から

$$A^2 - (a+d)A + |A| \cdot I_2 = O_2$$

が従います.

II $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ が

$$A^2 - 4A - 5I_2 = O_2 \quad (\#)$$

を満たすことから A^n を求めましょう.

HINT: (#) から

$$A^2 - (5 + (-1)) + 5 \cdot (-1)I_2 = O_2 \quad (\$)$$

を導きます.

解答 (\$) から

$$\begin{cases} A^2 - 5A = -(A - 5I_2) & \cdots (1) \\ A^2 + A = 5(A + I_2) & \cdots (2) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} A(A - 5I_2) = -(A - 5I_2) & \cdots (3) \\ A(A + I_2) = 5(A + I_2) & \cdots (4) \end{cases}$$

(3) を繰り返して用いて

$$\begin{aligned} A^2(A - 5I_2) &= A \cdot (-1)(A - 5I_2) = (-1)^2(A - 5I_2) \\ A^3(A - 5I_2) &= A \cdot (-1)^2(A - 5I_2) = (-1)^3(A - 5I_2) \\ A^4(A - 5I_2) &= A \cdot (-1)^3(A - 5I_2) = (-1)^4(A - 5I_2) \end{aligned}$$

から

$$A^n(A - 5I_2) = (-1)^n(A - 5I_2) \quad (5)$$

であることが分かります. 同様に (4) を繰り返して

$$A^n(A + I_2) = 5^n(A + I_2) \quad (6)$$

であることが分かります. (5) と (6) は

$$\begin{cases} A^{n+1} - 5A^n &= (-1)^n(A - 5I_2) \quad \cdots (7) \\ A^{n+1} + A^n &= 5^n(A + I_2) \quad \cdots (8) \end{cases}$$

となりますから (7) - (8) から

$$-6A^n = (-1)^n(A - 5I_2) - 5^n(A + I_2)$$

すなわち

$$A^n = -\frac{1}{6}(-1)^n(A - 5I_2) + \frac{1}{6}5^n(A + I_2)$$

であることが分かります.

第4章追加演習問題

I (1)

$${}_{n+1}C_k = {}_nC_k + {}_nC_{k-1}$$

を示しましょう.

(2) (1) を用いて $B \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$(I + B)^n = I + {}_nC_1B + {}_nC_2B^2 + \cdots + {}_nC_kB^k + \cdots + B^n$$

が成立することを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!\{(n-k+1)+k\}}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!\{(n+1)-k\}!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!\{(n+1)-k\}!} = {}_{n+1}C_k \end{aligned}$$

注意 $1, 2, \dots, n, n+1$ の番号が書いてる $n+1$ 個のボールから k 個選ぶ組み合わせの数は

$$\begin{aligned} &(n+1) \text{ を含む場合 } {}_nC_{k-1} \text{ 通り} \\ &(n+1) \text{ を含まない場合 } {}_nC_k \text{ 通り} \end{aligned}$$

に場合分けできて、両方に属する場合がないことから分かります.

(2) n に関する帰納法で示します. $n=1$ の場合は明らかです. n の場合が成立するとします.

$$\begin{array}{rcl} I_2(I_2+B)^n & = & I_2 + {}_nC_1B + {}_nC_2B^2 + \cdots + {}_nC_kB^k + \cdots + B^n \\ +) \quad B(I_2+B)^n & = & B + {}_nC_1B^2 + \cdots + {}_nC_{k-1}B^k + \cdots + {}_nC_{n-1}B^n + B^{n+1} \\ \hline (I_2+B)^{n+1} & = & I_2 + {}_{n+1}C_1B + {}_{n+1}C_2B^2 + \cdots + {}_{n+1}C_kB^k + \cdots + {}_{n+1}C_nB^n + B^{n+1} \end{array}$$

II $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して A^n を求めましょう.**解答** 帰納法でも証明できますが、ここでは問題 **I** を用います. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $J^2 = O_2$ となりますから

$$A^n = (I_2 + aJ)^n = I_2 + {}_nC_1aJ + \cdots + {}_nC_ka^kJ^k + \cdots + a^nJ^n = I_2 + naJ = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となります.}$$

III $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ とします.

(1) A が正則ならば A^{-1} も正則であることを示しましょう.

(2) A, B が正則ならば積 AB も正則であることを示しましょう.

解答 (1)

$$A^{-1}A = A^{-1}A = I_n$$

から A は正則で $(A^{-1})^{-1} = A$ であることが分かります.

(2)

$$AB \cdot (B^{-1}A) = A(B^{-1}B)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

から AB は正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ であることが分かります.

IV

$A \in M_2(\mathbf{K})$ とします. 任意の $X \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$AX = XA \tag{4.19}$$

を満たす A をすべて求めましょう.

解答 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表します. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき

$$AX = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad XA = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから, $XA = AX$ から $b = c = 0$ であることが従います.

以下 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ となりますが, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & a \\ d & 0 \end{pmatrix}, \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & d \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

となります. $AX = XA$ から $a = d$ が従います. よって $A = aI_2$ と表されることが分かります. このとき

$$AX = (aI_2)X = a(I_2X) = aX, \quad XA = X(aI_2) = a(XI_2) = aX$$

から任意の $X \in M_2(\mathbf{K})$ に対して $AX = XA$ が成立することが分かります.