線型独立性・基底の次元

$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell \in \mathbb{K}^n$ がLIとは

$$x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_\ell\vec{a}_\ell = \vec{0} \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_\ell = 0$$

が成立するときである.

定理 $\ell \leqq n$とする.
$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell$ がLI $\Leftrightarrow (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_\ell) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_\ell)$
と行基本変形できる.

(注) $\ell=1,2,3$で定理は示してある.

($\Leftarrow$) は明らかである.

($\Rightarrow$) 帰納法で示す.

$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{\ell-1}, \vec{a}_\ell$ がLIならば $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{\ell-1}$ はLIである

(これを示せるか?) 従って

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_{\ell-1}) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_{\ell-1})$$

と行基本変形できる. これを用いると

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_{\ell-1}\ \vec{a}_\ell) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_{\ell-1}\ \vec{c})$$

と変形できる. $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{\ell-1} \\ c_\ell \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ とすると $c_\ell = \cdots = c_n = 0$ ならば

$$\vec{a}_\ell = -c_1\vec{a}_1 - \cdots - c_{\ell-1}\vec{a}_{\ell-1}$$

と $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{\ell-1}, \vec{a}_\ell$ がLDとなるので矛盾. 従って $\begin{pmatrix} c_\ell \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が従う.

$\begin{pmatrix} c_\ell \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_m \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $c_m \neq 0$ とすると

$$(\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_{\ell-1}\ \vec{c}) \xrightarrow[m r \leftrightarrow \ell r]{} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdots \vec{e}_{\ell-1} & \begin{matrix} * \\ c_m \\ * \end{matrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell r \times \frac{1}{c_m}} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdots \vec{e}_{\ell-1} & \begin{matrix} * \\ 1 \\ * \end{matrix} \end{pmatrix} \leftarrow \ell$$

$\to \cdots \to \left(\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_{\ell-1}\ \vec{e}_\ell \right)$

①で上と下を消す.

定理 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell$ が LI $\iff$ $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{\ell-1}$ が LI AND $\vec{a}_\ell \notin L(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell)$

($\Rightarrow$) 「$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell$ が LI $\Rightarrow$ $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{\ell-1}$ は LI」は ok とする.

$\vec{a}_\ell \in L(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{\ell-1})$ とすると

$$\vec{a}_\ell = c_1 \vec{a}_1 + \cdots + c_{\ell-1} \vec{a}_{\ell-1}$$

から $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell$ が LD となるので矛盾 よって $\vec{a}_\ell \notin L(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{\ell-1})$

($\Leftarrow$) $c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_{\ell-1}\vec{a}_\ell + c_\ell \vec{a}_\ell = \vec{0}$ とする. $c_\ell \neq \vec{0}$ とすると

$$\vec{a}_\ell = -\frac{1}{c_\ell}(c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_{\ell-1}\vec{a}_{\ell-1}) \in L(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{\ell-1})$$

となり 矛盾. よって $c_\ell = 0$. このとき $c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_{\ell-1}\vec{a}_\ell = \vec{0}$ から

$c_1 = \cdots = c_{\ell-1} = 0$. □

この定理を用いると次が分かる.

定理 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell$ が LI $\iff$ $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{a}_2 \notin L(\vec{a}_1)$, $\vec{a}_3 \notin L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, $\cdots$, $\vec{a}_\ell \notin L(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{\ell-1})$

定理（超重要）$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell \in \mathbb{K}^n$ とする. $\ell > n$ ならば

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell$ は LD.

（証明）(i) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ が LD のとき $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \dots, \vec{a}_\ell$ は LD.

(ii) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ が LI のとき

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n) = I_n$$

となる. このとき

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n \mid \vec{a}_{n+1}) \to \cdots \to (I_n \mid \vec{c})$$

とすると $\vec{c} = c_1 \vec{e}_1 + \cdots + c_n \vec{e}_n$ から $\vec{a}_{n+1} = c_1 \vec{a}_1 + \cdots + c_n \vec{a}_n$

が従う.

系 $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m \in \mathbb{K}^n$ とします. $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell \in L(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m)$ とします.

$\ell > m$ ならば $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell$ は LD.（対偶：$\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell$ が LI ならば $\ell \leq m$）

証明 $(\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_\ell) = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m)(\vec{c}_1 \cdots \vec{c}_\ell)$

を満たす $\vec{c}_j \in \mathbb{K}^m$ が存在します. 定理から $\exists \vec{x} (\neq \vec{0}) \in \mathbb{K}^\ell$

$(\vec{c}_1 \cdots \vec{c}_\ell)\vec{x} = \vec{0}$ このとき

$$(\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_\ell)\vec{x} = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m)(\vec{c}_1 \cdots \vec{c}_\ell)\vec{x}$$
$$= (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m)\vec{0} = \vec{0}$$

から $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell$ が LD であることが分かります.

---

n に関する帰納法でも示せます. ⊗ にあります.

系の系　$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m, \vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell \in \mathbb{K}^n$ が次の条件を満たす

とする

i) $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m$ は LI

ii) $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell$ は LI

iii) $L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m) = L(\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell)$

$\Rightarrow m = \ell$.

基底　$\mathbb{K}^n$ の部分空間 V が $V \neq \{\vec{0}\}$ を満たすとします.

$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell \in V$ が V の基底とは

i) $V = L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell)$

ii) $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$ は LI

を満たすときです.

系の系 によると $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$ が V の基底, $\vec{q}_1, \cdots \vec{q}_m$ が V の基底

ならば $\ell = m$ が分かります.

$V \subset \mathbb{K}^n$ が V の部分空間とは

$\vec{x}, \vec{y} \in V \Rightarrow \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V$

(+ と・について閉じている)

基底の存在　Vが$\mathbb{K}^n$の部分空間で，$V \neq \{\vec{0}\}$とします．

このときVには基底が存在します．

i)　$V \neq \{\vec{0}\}$から$\exists \vec{p}_1 \in V$，$\vec{p}_1 \neq \vec{0}$

ii a)　$V = L(\vec{p}_1)$ならば　$\vec{p}_1$が基底．

ii b)　$V \neq L(\vec{p}_1)$ならば$V \supsetneqq L(\vec{p}_1)$なので$\exists \vec{p}_2 \in V$，$\vec{p}_2 \notin L(\vec{p}_1)$
（このとき$\vec{p}_1, \vec{p}_2$はLI）

iii a)　$V = L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ならば$\vec{p}_1, \vec{p}_2$は$V$の基底

iii b)　$V \neq L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ならば$V \supsetneqq L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$なので$\exists \vec{p}_3 \in V$，$\vec{p}_3 \notin L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$
（このとき$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$はLI）

ℓ b)
$V \neq L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{\ell-1})$ならば　$V \supsetneqq L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{\ell-1})$なので
このとき
（$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{\ell-1}$はLI）　$\exists \vec{p}_\ell \in V$，$\vec{p}_\ell \notin L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{\ell-1})$

$\ell+1$, a)　$V = L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell)$ならば　$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$は$V$の基底

$\ell+1$, b)　$V \neq L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell)$ならば$V \supsetneqq L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell)$なので
$\exists \vec{p}_{\ell+1} \in V$，$\vec{p}_{\ell+1} \notin L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell)$（このとき$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{\ell+1}$はLI）

$\vdots$

これはどこまで続くか？

次元　$V \neq \{\vec{0}\}$を満たす$\mathbb{K}^n$の部分空間に対して基底$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$の存在が分かりました．このとき

$$\dim V = \ell$$

といいます．Vの次元はℓ

以下の定理は今後時々使います。

dim $\{\vec{0}\} = 0$ とします。

<u>定理</u> $V, W (\subset \mathbb{K}^n)$ が部分空間とします。

(i) $V \subset W \Rightarrow \dim V \leqq \dim W$

(ii) $V \subset W$ かつ $\dim V = \dim W \Rightarrow V = W$

(i) V の基底を $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l$, W の基底を $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_m$ とします。

$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l$ は LI で $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l \in L(\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_m)$

から $l \leqq m$ が従います。これは $\dim V \leqq \dim W$ を意味します。

(ii) V の基底 $\vec{p}_1, \cdots \vec{p}_l$, W の基底 $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l$ とします。

$V \subsetneqq W$ とすると $\exists\, \vec{p}_{l+1} \in W$, $\vec{p}_{l+1} \notin V$ このとき

$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{l+1}$ は LI. しかし $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{l+1} \subset L(\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l)$

から $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{l+1}$ は LD となってしまいます。従って $V = W$

超重要定理の別証明（③による）

(3の1) $\vec{a}_1=\vec{0}$ ならば $(\vec{0}\ \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_l)\vec{e}_1=\vec{0}$

$\vec{a}_1\neq\vec{0}$ とすると

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_l) \to\cdots\to \left(\begin{array}{c|ccc}1 & *_2 & \cdots & *_l\\ 0 & & & \\ \vdots & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_l \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad (\vec{b}_j\in\mathbb{K}^{n-1})$$

とできる。帰納的に考えると $(l-1)>(n-1)$ から $\exists \begin{pmatrix}x_2\\ \vdots\\ x_l\end{pmatrix}\neq\vec{0}$

$$(\vec{b}_2\cdots\vec{b}_l)\begin{pmatrix}x_2\\ \vdots \\ x_l\end{pmatrix}=\vec{0}$$

ここで $x_1 := -*_2x_2-\cdots-*_lx_l$ とすると

$$(\vec{a}_1\cdots\vec{a}_l)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_l\end{pmatrix}=\vec{0},\quad \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_l\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

となる。

(3の2) 行列式が分っていると次のようにも理解できる。

$A\in M_n(\mathbb{K})$ に対して $(|A|=0 \iff \exists\vec{v}\in\mathbb{K}^n\ A\vec{v}=\vec{0}, \vec{v}\neq\vec{0})$

これを用いると次のようにも示せる。

$|\vec{a}_1\cdots\vec{a}_n|=0$ のとき $\exists\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ $(\vec{a}_1\cdots\vec{a}_n)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}=\vec{0}$

$$(\vec{a}_1\cdots\vec{a}_n\cdots\vec{a}_l)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$|\vec{a}_1\cdots\vec{a}_n|\neq 0$ のとき $(\vec{a}_1\cdots\vec{a}_n)$ が正則なので

$$(\vec{a}_1\cdots\vec{a}_n\cdots\vec{a}_l)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$$ ←第$n+1$成分は$1(\neq 0)$

は $\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=-(\vec{a}_1\cdots\vec{a}_n)^{-1}\vec{a}_{n+1}$ と解ける。