L05 問題IIの補足

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -23 \\ -25 \end{pmatrix},\quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

に対して

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と行基本変形できた. これから

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b},\quad \vec{d} = -2\vec{a} + \vec{b}$$

従って

$$\vec{c}, \vec{d} \in L(\vec{a}, \vec{b}) := \{ x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbb{R}^4 ;\ x, y \in \mathbb{R} \}$$

が分かる. $\vec{c}, \vec{d}$ の第1成分と第2成分を用いると $\underbrace{\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0}_{\text{となるので}}$

$$\boxed{\vec{c} \nparallel \vec{d}}$$

これは $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ からも従う. (L05で説明した定理)

定理 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ が $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を満たすとき

$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},\ \vec{d} = z\vec{a} + w\vec{b}$ に対して

$$\vec{c} \nparallel \vec{d} \iff \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} \neq 0$$

さらに次が成立する ($L(\vec{a}, \vec{b})$ は $+$ と $\cdot$ について閉じている)

$$\boxed{\lambda\vec{c} + \mu\vec{d} \in L(\vec{a}, \vec{b})}$$

$$\lambda\vec{c} + \mu\vec{d} = \lambda(3\vec{a} + 2\vec{b}) + \mu(-2\vec{a} + \vec{b})$$
$$= (3\lambda - 2\mu)\vec{a} + (2\lambda + \mu)\vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b})$$

この計算は $(\vec{c}\ \vec{d}) = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ と表わすと

②

$$\lambda\vec{c}+\mu\vec{d} = (\vec{c}\ \vec{d})\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \left((\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{結合則}}}{=} (\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\right) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}3\lambda-2\mu\\ 2\lambda+\mu\end{pmatrix}$$

と自然に計算できる.

さらに $\vec{v}\in L(\vec{c},\vec{d})$ とすると $\vec{v}=\lambda\vec{c}+\mu\vec{d}$ となり

$\vec{v}\in L(\vec{a},\vec{b})$

が従う. よって示せた.

$$\boxed{L(\vec{c},\vec{d})\subset L(\vec{a},\vec{b})}$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}) \to\cdots\to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to\cdots\to \left(\begin{array}{cc|cc}\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 1 & 0\\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$ と

すると

$\vec{a}=\frac{1}{7}\vec{c}-\frac{2}{7}\vec{d},\ \vec{b}=\frac{2}{7}\vec{c}+\frac{3}{7}\vec{d}$ が従うので

$$\boxed{L(\vec{a},\vec{b})\subset L(\vec{c},\vec{d})}$$

以上から

$$\boxed{L(\vec{c},\vec{d})=L(\vec{a},\vec{b})}$$

が分かる.

注意　$L(\vec{c},\vec{d}) \subset L(\vec{a},\vec{b})$ と $\vec{c} \nparallel \vec{d}$ から

$$L(\vec{c},\vec{d}) = L(\vec{a},\vec{b})$$

が従う．背理法で示せる．$L(\vec{c},\vec{d}) \subsetneqq L(\vec{a},\vec{b})$ とすると，$\exists \vec{f} \in L(\vec{a},\vec{b})$ が $\vec{f} \notin L(\vec{c},\vec{d})$ を満たす．このとき

$\vec{c},\vec{d},\vec{f}$ は LI．実際

$$\xi\vec{c} + \eta\vec{d} + \zeta\vec{f} = \vec{0}$$

とするとき $\zeta \neq 0$ は成立しない．$\zeta \neq 0$ ならば $\underline{\vec{f} = -\frac{\xi}{\zeta}\vec{c} - \frac{\eta}{\zeta}\vec{d}}$ $\in L(\vec{c},\vec{d})$ となるからである．よって $\zeta = 0$．このとき $\xi\vec{c} + \eta\vec{d} = \vec{0}$ から $\xi = \eta = 0$．ところが「$L(\vec{a},\vec{b})$ に3本の線形独立なベクトルは存在しない」ので矛盾が生じる．（$\subsetneqq$ は成立しなくて $=$）

「…」を示そう．

$$\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b},\quad \vec{d} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b},\quad \vec{f} = x_3\vec{a} + y_3\vec{b}$$

とすると

$$\vec{0} = \lambda\vec{c} + \mu\vec{d} + \nu\vec{f}$$
$$= (\vec{c}\ \vec{d}\ \vec{f})\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$$

とすると，これは

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} = \vec{0}$$

と同値だが，これには非自明な $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在する．

最後に 基底 $\vec{a}, \vec{b}$ を使う場合の座標 x, y と 基底 $\vec{c}, \vec{d}$ を使う場合の座標 ξ, η の関係について考える.

$\vec{v} \in L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{c}, \vec{d})$ とすると

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{c} + \eta\vec{d}$$

が成立する.

$$x\vec{a} + y\vec{b} \underset{\uparrow}{=} (3\xi - 2\eta)\vec{a} + (2\xi + \eta)\vec{b}$$

①の計算

$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ なので

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} x = 3\xi - 2\eta \\ y = 2\xi + \eta \end{cases}$$

$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ のとき
$x_1\vec{a} + y_1\vec{b} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$
から $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$

が従う. 同様に

$$\xi\vec{c} + \eta\vec{d} = x\left(\frac{1}{7}\vec{c} - \frac{2}{7}\vec{d}\right) + y\left(\frac{2}{7}\vec{c} + \frac{3}{7}\vec{d}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y\right)\vec{c} + \left(-\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y\right)\vec{d}$$

から

$$\xi = \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y, \quad \eta = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y$$

が分かる.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

に注目したから $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ をかけて

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と逆行列を用いてもよい.