線型変換の行列式と固有多項式　①

$A \in M_2(\mathbb{K})$ と正則な $P \in M_2(\mathbb{K})$ に対して

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

$$\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \Phi_A(\lambda)$$

が成立した。($A \in M_3(\mathbb{K})$ についても同様である)

$V(\subset \mathbb{K}^n)$ が 2次元部分空間として線型変換

$$f : V \longrightarrow V$$

すなわち

$$f(\lambda \vec{v_1} + \mu \vec{v_2}) = \lambda f(\vec{v_1}) + \mu f(\vec{v_2})$$

が成立する f が与えられているとする。

$\vec{p_1}, \vec{p_2} \in V$ が V の基底とする。このとき

$$\mathbb{K}^2 \xrightarrow{\sim} V$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x\vec{p_1} + y\vec{p_2} = (\vec{p_1}\ \vec{p_2})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は全単射である。$\vec{v} \in V$ に対し $\exists ! \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$

$$\vec{v} = x\vec{p_1} + y\vec{p_2}.$$

このとき

$$f(\vec{v}) = x f(\vec{p_1}) + y f(\vec{p_2}) = (f(\vec{p_1})\ f(\vec{p_2}))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。$\vec{p_1}, \vec{p_2}$ が V の基底なので

$$f(\vec{p_1}) = (\vec{p_1}\ \vec{p_2})\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}\vec{p_1} + a_{21}\vec{p_2}$$

$$f(\vec{p_2}) = (\vec{p_1}\ \vec{p_2})\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}\vec{p_1} + a_{22}\vec{p_2}$$

と表現できるので

$$(f(\vec{p}_1)\ f(\vec{p}_2)) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

から

$$f(\vec{v}) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる.

$$f(\vec{v}) = x'\vec{p}_1 + y'\vec{p}_2 = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる. 以下

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

とする.

次に別の基底を $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ とする.

$$(\vec{q}_1\ \vec{q}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\ R$$

を満たす $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ で正則なものが存在する.

$$\vec{q}_1 = r_{11}\vec{p}_1 + r_{21}\vec{p}_2,\quad \vec{q}_2 = r_{12}\vec{p}_1 + r_{22}\vec{p}_2$$

から

$$\begin{aligned} f(\vec{q}_1) &= r_{11}f(\vec{p}_1) + r_{21}f(\vec{p}_2) \\ &= (f(\vec{p}_1)\ f(\vec{p}_2))\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \end{pmatrix} = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)A\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\vec{q}_2) &= r_{12}f(\vec{p}_1) + r_{22}f(\vec{p}_2) \\ &= (f(\vec{p}_1)\ f(\vec{p}_2))\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \end{pmatrix} = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)A\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って

$$(f(\vec{q}_1)\ f(\vec{q}_2)) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) A \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) A R$$

となります。$\vec{v} \in V$ に対して

$$\vec{v} = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad f(\vec{v}) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2)\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}$$

と座標系を定めると

$$f(\vec{v}) = f(\xi \vec{q}_1 + \eta \vec{q}_2)$$

$$= (f(\vec{q}_1)\ f(\vec{q}_2))\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) A R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{v}) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2)\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) R \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}$$

から

$$AR\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = R^{-1}AR\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

であることが分かります。

$$\det(A) = \det(R^{-1}AR)$$

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{R^{-1}AR}(\lambda)$$

からこれを $\det(f)$, $\Phi_f(\lambda)$ と定めます。