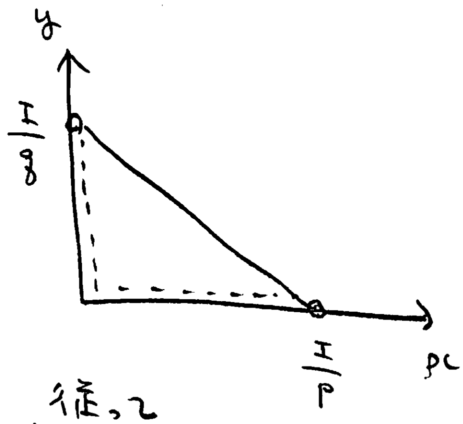
$$u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \quad (x, y > 0)$$

①

効用最大化について　　$I, p, q > 0$ として

$$g(x,y) = I - px - qy \geqq 0$$

の下で最大化することを考える



$$\nabla(g) = \begin{pmatrix} -p \\ -q \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$$\nabla(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

なので極大は $g(x,y) = 0$ においてとる．　従って (x,y) において

不等式制約の下で最大ならば極大で，(x,y) において

等式制約 $g(x,y)=0$ の下で極大とする．まとめると

不等式制約　　$g(x,y) \geqq 0$ の下で (x,y) において最大

$\Downarrow$

等式制約　　$g(x,y) = 0$ の下で (x,y) において極大

$\Downarrow$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \nabla(u)(x,y) + \lambda \nabla(g)(x,y) = \vec{0} \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad (\#)$$

(#) は

$$\begin{cases} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} + \lambda(-p) = 0 & \text{(i)} \\ \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} + \lambda(-q) = 0 & \text{(ii)} \\ I - px - qy = 0 & \text{(iii)} \end{cases}$$

(i) × x, (ii) y から

$$x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 3\lambda p x = \frac{3}{2} \lambda q y$$

②

(i)において $\lambda = 0$ とすると $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 0$ となるが、これはありえないので $\lambda \neq 0$ 従って

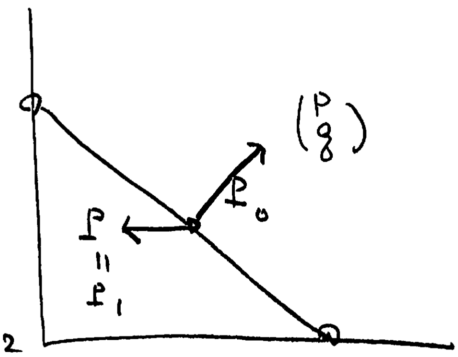
$$px = \frac{1}{2}qy$$

px と qy の比を考えると $px = \frac{I}{3}$, $qy = \frac{2I}{3}$ 従って

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3q}$$

以下 $P_0\left(\frac{I}{3p}, \frac{2I}{3q}\right)$ として P_0 において不等式制約の下で最大であることを示す. $g(P) > 0$ の場合

$\vec{\alpha} = \overrightarrow{P_0P}$ とする. $P_t = P_0 + t\vec{\alpha}$ とする.



$U(t) = u(P_t)$ とすると Taylor の定理から $t > 0$ とすると

$$U(t) = U(0) + U'(0)\cdot t + U''(c)\frac{t^2}{2}$$

を満たす c が 0 と t の間に存在する

$$U(0) = u(P_0), \quad U'(0) = (\nabla(u)(P_0), \alpha) = \left(\lambda\binom{p}{q}, \vec{\alpha}\right)$$

(i)から $\lambda > 0$ がわかり、$\left(\binom{p}{q}, \vec{\alpha}\right) < 0$ なので $U'(0) < 0$

$$H(u) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} & -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}} \end{pmatrix}$$

において $\det H(u) = 0$, $u_{xx} \leq 0$, $u_{yy} \leq 0$ から $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$(H(u)\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$$

従って $U''(c) = (H(u)(P_c)\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) \leq 0$

が従う. (2次形式の非正定値の必要十分条件)

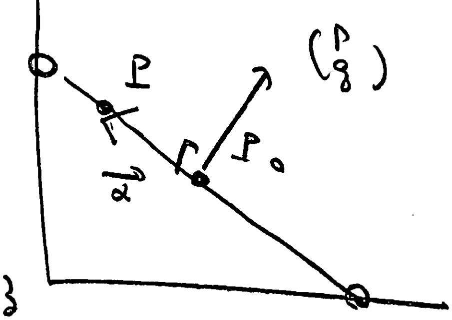
以上で $U'(0)<0$, $U''(0)\leq 0$ から

$$u(P_t) < u(P_0) \quad (t>0)$$

特に内点の P に対して $u(P)<u(P_0)$

$t=1$ とすると

<u>$g(P)=0$ のとき</u> 同様に $U(t)=u(P_t)$ とする.



$P \neq P_0$ として

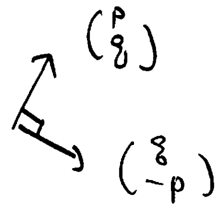
$$U(t)=U(0)+U'(0)t+U''(c)\frac{t^2}{2}$$

を満たす c が 0 と t の間に存在する

$$U(0)=u(P_0),\quad U'(0)=(\nabla(u)(P_0), \vec{\alpha})=\lambda\left(\binom{p}{q}, \vec{\alpha}\right)=0$$

$\vec{\alpha}=s\binom{q}{-p}$ と表わせることに注意すると

P_0 の座標を (x_0, y_0) とすると



$$U''(c)=-\frac{2}{9}x_0^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}s^2q^2-\frac{4}{9}x_0^{-\frac{2}{3}}y_0^{-\frac{1}{3}}s^2pq$$

$$-\frac{2}{9}x_0^{\frac{1}{3}}y_0^{-\frac{4}{3}}s^2p^2$$

$$<0$$

から.

$$U(t)<U(0)$$

特に $t=1$ のとき

$$U(1)<U(0) \quad \text{すなわち} \quad u(P)<u(P_0)$$

が従う.

これでラグランジュの定理を使って費用最小化ができるようになった!!

双対定理　$P_0\left(\frac{I}{3p}, \frac{2I}{3q}\right)$ とおくと $u(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ に対して　④

$$\begin{cases} c(P_0) \leqq I \\ u(P) \leqq I \Rightarrow u(P) \leqq u(P_0) = \left(\frac{I}{3p}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2I}{3q}\right)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$= \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} p^{-\frac{1}{3}} q^{-\frac{2}{3}} I$$

が成立することを示した。$\bar{u} = u(P_0) = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} p^{-\frac{1}{3}} q^{-\frac{2}{3}} I$ のとき

すなわち $I = \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}} \bar{u}$ のとき双対問題。

$$\begin{cases} u(x,y) \geqq \bar{u} \text{ のとき} \\ c(x,y) = px + qy \text{ を最小化} \end{cases}$$

は

$$x_0 = \frac{I}{3p} = \frac{1}{3p}\cdot\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}} \bar{u} = 2^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{2}{3}} \bar{u}$$

$$y_0 = \frac{2I}{3q} = \frac{2}{3q}\cdot\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}} \bar{u} = 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}} \bar{u}$$

とおくと $P_0(x_0, y_0)$ で最小値

$$c(P_0) = px_0 + qy_0 = 2^{-\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}} \bar{u} + 2^{\frac{1}{3}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}} \bar{u}$$

$$= \left(\frac{2^{\frac{1}{3}}}{2} + 2^{\frac{1}{3}}\right) p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}} \bar{u}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}} \bar{u} = \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}} \bar{u} = I$$

をとります。

狭義の準凹

$$u_x = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} > 0 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2_{++}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & u_x & u_y \\ u_x & u_{xx} & u_{xy} \\ u_y & u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} & -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{9} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} & \frac{2}{9} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}} & -\frac{2}{9} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{4}{3}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{8}{81} x^{-1} + 2 \cdot \frac{4}{81} x^{-1} + \frac{2}{81} \cdot x^{-1} = \frac{18}{81} x^{-1} = \frac{2}{9} x^{-1} > 0$$

から狭義の準凹である.

$P_0 \left(\frac{I}{3p}, \frac{2I}{3q} \right)$ によって

$$\begin{cases} \nabla(u)(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0 P} \leq 0, \ P \neq P_0 \quad (\#) \\ \Longrightarrow \quad u(P) < u(P_0) \end{cases}$$

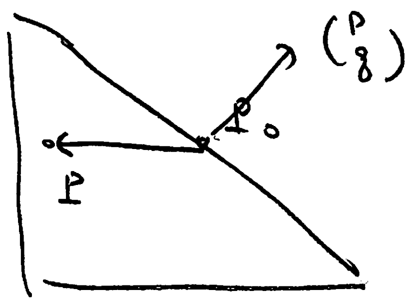
(#) は

$\nabla(u)(P_0) = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ から $\lambda > 0$ が存在するので

$$\lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \leq 0$$

から

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \leq 0$$



$$px + qy \leq pa + qb = I$$