

第 2 講義 04 月 15 日 演習問題解答

I 次の行列の逆行列を求めましょう。

$$(1) A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad (5) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (7) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

解答

$$(1) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

となります。

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \lambda = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \lambda \cdot 0 = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

となります。

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(7) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります.

II 関数

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x + 6y$$

に対して回転座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

を用いて、最小値を求めましょう.

解答

$$z = (x + y)^2 - xy - 4x + 6y$$

に

$$x + y = \sqrt{2}X, \quad xy = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$$

を代入して

$$\begin{aligned} z &= 2X^2 - \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) + 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ &= \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + \sqrt{2}X + 5\sqrt{2}Y \\ &= \frac{3}{2} \left(X + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 + \frac{1}{2}(Y + 5\sqrt{2})^2 - \frac{1}{3} - 25 \end{aligned}$$

から $X = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $Y = -5\sqrt{2}$ のとき, すなわち

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + 5\sqrt{2} \right) = \frac{14}{3} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} - 5\sqrt{2} \right) = -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

のとき最小値 $z = -25$ をとります.

III

$$z = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32$$

に対して, 平行移動の座標変換を用いて 1 次の項のない形にしましょう.

解答 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + 32$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + 32 \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32 \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32 \end{aligned}$$

と展開できます. ここで

$$\left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32 \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32 \end{aligned}$$

となります. ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32 = -\frac{1}{2} \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32 \tag{1}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + 32 = 70 \tag{2}$$

から

$$z = \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 70$$

となります.

IV

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y$$

に対して、平行移動の座標変換を用いて1次の項のない形にしましょう。

解答 $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

と表現できます。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

と展開できます。ここで

$$\left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

となります。ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) &= -\frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

から

$$z = \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \frac{2}{3}$$

となります。

V 次の曲面の P_0 における接平面を求めましょう。

(1) $z = xy - 2x + 2y - 1$ at $P_0(0, 0, -1)$

(2) $z = \frac{x}{x+y}$ at $P_0(1, -2, -1)$

(3) $z = x^2 - xy + 2y^2$ at $P_0(2, 1, 4)$

(4) $z = \frac{y}{1+x^2}$ at $P_0(0, 0, 0)$

(2) と (4) では 1 変数の微分の公式

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

を用いましょう。

解答 (1)

$$z_x = y - 2, \quad z_y = x + 2$$

から

$$z_x(0, 0) = -2, \quad z_y(0, 0) = 2$$

となります。よって $P_0(0, 0, -1)$ における接平面は

$$z = -2x + 2y - 1$$

であることが分かります。

(2)

$$z_x = \frac{1 \cdot (x+y) - x \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad z_y = \frac{-x}{(x+y)^2}$$

から

$$z_x(1, -2) = -2, \quad z_y(1, -2) = -1$$

となります。よって $P_0(1, -2, -1)$ における接平面は

$$z = -2(x-1) - (y+2) - 1$$

であることが分かります。

(3)

$$z_x = 2x - y, \quad z_y = -x + 4y$$

から

$$z_x(2, 1) = 3, \quad z_y(2, 1) = 2$$

となります。よって $P_0(2, 1, 4)$ における接平面は

$$z = 3(x-2) + 2(y-1) + 4$$

であることが分かります。

(4)

$$z_x = -\frac{y(2x)}{(1+x^2)^2} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2}, \quad z_y = \frac{1}{1+x^2}$$

から

$$z_x(0,0) = 0, \quad z_y(0,0) = 1$$

となります. よって $P_0(0,0,0)$ における接平面は

$$z = y$$

であることが分かります.

VI $A = \begin{pmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{pmatrix}$ に対して

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

を満たす $c \in \mathbf{R}$ をすべて求めましょう.

解答 求める条件は

$$5-c > 0 \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{vmatrix} > 0$$

となります.

$$\begin{vmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{vmatrix} = (5-c)(2-c) - 2^2 = (c-1)(c-6) > 0 \quad \Leftrightarrow c < 1, c > 6$$

なので, 求める条件は

$$c < 1$$

であることが分かります.

VII 以下の曲線 $g(x, y) = 0$ の P_0 における接線を求めましょう.

(1) $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ at $P_0(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$

(2) $g(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$ at $P_0(1, 1)$

(3) $g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ at $P_0(0, 1)$

解答 (1) $g_x = 2x, g_y = 8y$ から

$$g_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}, \quad g_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}$$

と計算されます. 従って $P_0(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ における接線は

$$\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2}\left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 0$$

となります。

(2) $g_x = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, $g_y = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$ から

$$g_x(1, 1) = \frac{1}{3}, \quad g_y(1, 1) = \frac{1}{3}$$

となりますから, $P_0(1, 1)$ における接線は

$$\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) = 0$$

となります。

(3) $g_x = 2x - y$, $g_y = -x + 2y$ から

$$g_x(0, 1) = -1, \quad g_y(0, 1) = 2$$

となりますから, $P_0(1, 1)$ における接線は

$$-1 \cdot (x-0) + 2(y-1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad -x + 2(y-1) = 0$$

となります。

VIII 資本 K , 労働力 L の投入に対する生産関数

$$Q = F(K, L) = 9K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

を考えます。

(1) $K = 216$ and $L = 10^3$ に対する生産量 Q を求めましょう。

(2) $(K, L) = (216, 10^3)$ のときの資本の限界生産物 MPK と労働の限界生産物 MPL を求めて, $F(216, 998)$ と $F(217.5, 10^3)$ の近似値を求めましょう。

解答 計算のために $216 = 6^3$ に注意しましょう。このとき

$$Q = F(216, 10^3) = 9 \times (6^3)^{\frac{1}{3}} \times (10^3)^{\frac{2}{3}} = 9 \times 6 \times 10^2 = 5400$$

であることがわかります。次に MPK と MPL を以下のように求めます。

$$F_K(K, L) = 3K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}, \quad F_L(K, L) = 6K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

従って $K = 216 = 6^3$, $L = 10^3$ のとき

$$\begin{aligned} MPK &= F_K(216, 10^3) = 3(6^3)^{-\frac{2}{3}}(10^3)^{\frac{2}{3}} \\ &= 3 \times \frac{1}{36} \times 10^2 = \frac{1}{12} \times 10^2 = 8.33\dots \\ MPL &= F_L(216, 10^3) = 6 \times (6^3)^{\frac{1}{3}}(10^3)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 6 \times 6 \times 10^{-1} = 3.6 \end{aligned}$$

以上から $F_L(216, 10^3)$ を用いて $F(216, 998) = F(216, 10^3 - 2)$ の近似値を

$$\begin{aligned} F(216, 10^3 + 2) &\approx F(216, 10^3) + F_L(216, 10^3) \cdot (-2) \\ &= 5400 + 3.6 \times (-2) = 5392.8 \end{aligned}$$

と求めます. さらに $F_K(216, 10^3)$ を用いて $F(217.5, 10^3) = F(216 + 1.5, 10^3)$ の近似値を

$$\begin{aligned} F(216 + 1.5, 10^3) &\approx F(216, 10^3) + F_K(216, 10^3) \cdot 1.5 \\ &= 5400 + \frac{1}{12} \times 10^2 \times 1.5 = 5412.5 \end{aligned}$$

と求めます.

IX 次の3点 A, B, C を通る平面の方程式を求めましょう.

(1) A(0, 0, 0), B(1, 2, 3), C(4, 5, 6)

(2) A(2, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 4)

(3) A(1, 2, 3), B(-1, -1, 0), C(2, -3, 5)

解答以下では

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

と \vec{p} と \vec{q} の外積を定めると

$$(\vec{p}, \vec{p} \times \vec{q}) = (\vec{q}, \vec{p} \times \vec{q}) = 0$$

が成立することを用いています. これは講義の中で説明します.

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から原点を通り法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるので, 求める平面の方程式は

$$x - 2y + z = 0$$

であることが分かります.

(2)

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 0$$

は平面を表して, 与えられた3点を通るので, これが求める方程式となります.

(3)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

から平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ であることが分かります. これから求める平面の方程式は

$$-17(x-1) + (y-2) + 11(z-3) = 0$$

となります.

X 以下のベクトルの外積を計算しましょう.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

XI(1) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ とします. $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であるとき, \vec{a}, \vec{b} が作る平行四辺形の面積は

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

であることを示しましょう. また

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}) = 0$$

であることを示しましょう. (ここでは, 3 次行列式を使わないで示しましょう.)

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$ であるとき, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が作る平行四面体の体積は

$$|(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|$$

であることを示しましょう.

XII $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします. このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

とします. このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

さらに $\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a}$ から $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ が従います.

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_3 + b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$