偏微分係数と極大・極小の必要条件・十分条件

Nobuyuki TOSE

emath, Lec 01 April 08, 2024

プラン

Part 01
開集合

開円盤

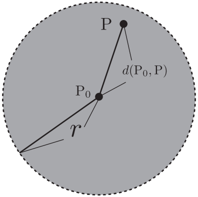
開円盤 (Open Disc)

$r > 0$, $\mathrm{P}_0(a, b) \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\}$$

を中心 P_0, 半径 $r > 0$ の**開円盤**と呼びます．ここで $d(\mathrm{P}_0, \mathrm{P})$ は 2 点 P_0, P の距離です．$\mathrm{P}(x, y)$ のとき

$$d(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$



注意今後「P_0 の近くで〜」という言い方をしますが，これはある正数 $r > 0$ に対して

任意の$\mathrm{P} \in B_r(\mathrm{P}_0)$において〜

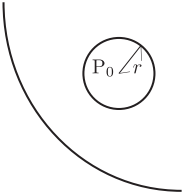
開集合（Open subsets）

Definition

$\mathbf{R}^2$ の部分集合 U があるとします．U が開集合であるとは任意の $\mathrm{P}_0 \in U$ に対して $r > 0$ が存在して

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\} \subset U$$

が成立することです．



注意 U の任意の点 P_0 の周りが U に含まれているということです．

命題・命題関数

命題とは真偽が明らかな文のことです．例えば

$$2 > 1 \quad \text{真（Truth）}$$
$$1 > 2 \quad \text{偽（False）}$$

集合 X 上の**命題関数**とは $x \in X$ に対して命題 $P(x)$ を対応させるものです．例えば $X = \mathbf{R}$ のとき

$$P(x): \quad 1 < x$$

と定めると

$$P(0): \quad 1 < 0 \quad \text{偽}$$
$$P(2): \quad 1 < 2 \quad \text{真}$$

となります.

命題関数 (2)

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ があるとき付随して命題を定めることができます.

$$\forall x \in X\,(P(x))$$

はすべての $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題です. 前ページの例では $P(0)$ が偽ですから $\forall x \in X\,(P(x))$ は偽です.
さらに

$$\exists x \in X\,(P(x))$$

はある $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題です. 前ページの例では $P(2)$ が真ですから $\exists x \in X\,(P(x))$ は真です.

開集合の例

以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合です.

- $\mathbf{R}^2$
- 上半平面
$$U_1 := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y > 0\}$$
- 第 1 象限（1st Quadrant）
$$\mathbf{R}^2_{++} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x,y > 0\}$$
- 開円盤
$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P},\mathrm{P}_0) < r\}$$

開集合–反例

以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合ではありません．

- $\mathrm{P}_0 \in \mathbf{R}^2$ のなす集合 $\{\mathrm{P}_0\}$
- 閉上半平面

$$F_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq 0\}$$

- 閉第 1 象限

$$\overline{\mathbf{R}^2_{++}} := \{(x, y)\mathbf{R}^2;\ x, y \geq 0\}$$

- 閉円盤

$$\overline{B_r(\mathrm{P}_0)} := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) \leq r\}$$

Part 02
極大・極小と停留点

1 変数の極大点（極小点）

微分可能な 1 変数関数の極小点（極大点）に関する次の定理を紹介します.

Theorem

微分可能な関数 $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ があるとします. f が $c \in]a, b[$ で極小（極大）ならば

$$f'(c) = 0$$

注意　これは中身を理解して欲しい定理です.

注意　定理の状況で f が $c \in]a, b[$ で極小とは, ある正数 $\delta > 0$ に対して

$$f(t) \geq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

が成立することです.

極大点・極小点

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f: \ U \to \mathbf{R}$$

に対して，f が $\mathrm{P}_0(a, b)$ で極小（resp. 極大）であるとはある $\delta > 0$ が存在して

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad ((x, y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

(resp.

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad ((x, y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

)
が成立するときです.

極大点・極小点であることの必要条件

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f: \ U \to \mathbf{R}$$

が U の各点 $\mathrm{P} \in U$ で x, y について偏微分できると仮定します.

Theorem

f が $\mathrm{P}_0(a, b) \in U$ で極小（極大）ならば

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \tag{1}$$

が成立します.

この状況で (1) を満たす点 $\mathrm{P}_0(a, b)$ を f の**停留点**と呼びます.

証明の概略

f が P_0 で極小とします．このときある正数 $\delta > 0$ が存在して

$$f(\mathrm{P}) \geq f(\mathrm{P}_0) \quad (\mathrm{P} \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

ここで

$$F(x) = f(x, b)$$

は少なくとも $a - \delta < x < a + \delta$ で定義されて,

$$F(x) \geq F(a) \quad (a - \delta < x < a + \delta)$$

従って $x = a$ で極小となります．このとき

$$F'(a) = 0 \quad \text{従って} \quad f_x(a, b) = 0$$

となります.

1変数の定理の証明

f が $t = c$ で極小とする．すなわち，ある正数 $\delta > 0$ に対して

$$f(t) \geq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

$c < t < c + \delta$ のとき

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \geq 0$$

なので $t \to c + 0$ と右極限をとると

$$f'(c) \geq 0$$

$c - \delta < t < c$ のとき

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \leq 0$$

なので $t \to c - 0$ と左極限をとると

$$f'(c) \leq 0$$

であることが分かります．よって $f'(c) = 0$

右極限・左極限・両側極限

ここで以下を用いています.

片側極限

$F:]a, c[\cup]c, b[\to \mathbf{R}$, $c \in]a, b[$ とします.

$$F(t) \to A \quad (t \to c)$$

ならば

$$F(t) \to A \quad (t \to c+0)$$

かつ

$$F(t) \to A \quad (t \to c-0)$$

実はこの定理の逆も成立しますが，証明は少し難しいです.

Part 03
Hesse行列と極大・極小

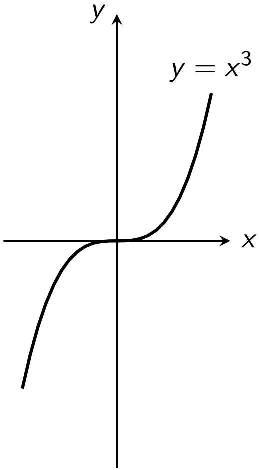
例–停留点であることは極大・極小の十分条件ではない

$$f(t) := t^3$$

に対して

$$f'(t) = 3t^2 \quad \text{特に} \quad f'(0) = 0$$

ですが，関数 $f(t)$ は $t = 0$ で極大でも極小でもありません．



極大・極小の十分条件–1 変数の場合

定理

C^2 級の関数 $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ が $c \in]a, b[$ に対して

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) > 0 \quad (\text{resp. } f''(c) < 0)$$

を満たすならば $f(t)$ は $t = c$ で極小（resp. 極大）となります.

例–停留点であることは極大・極小の十分条件ではない

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

を考えましょう.

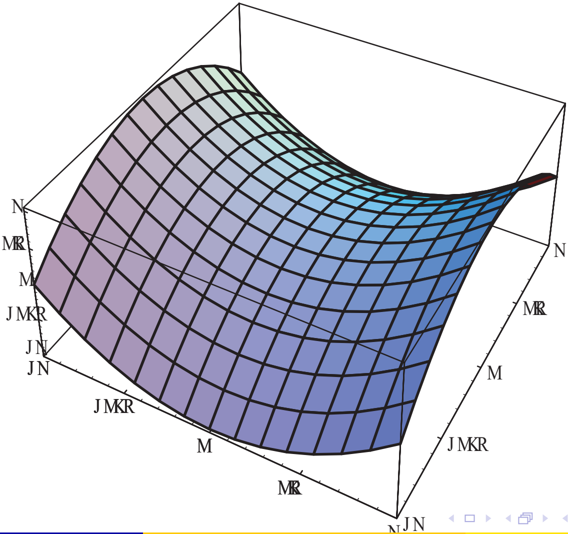
$$f_x(x, y) = 2x = 0, \quad f_y(x, y) = -2y = 0$$

から f の停留点は $(x, y) = (0, 0)$ です.

$$f(x, 0) = x^2, \quad f(0, y) = -y^2$$

から $(0, 0)$ で f は極大でも極小でもないことが分かります.

反例の図



極大・極小の十分条件

定理

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の C^2 級関数 $f: U \to \mathbf{R}$ に対して $\mathrm{P}_0(a,b) \in U$ が停留点であるとします.

$$f_x(\mathrm{P}_0) = f_y(\mathrm{P}_0) = 0$$

(1) $\begin{vmatrix} f_{xx}(\mathrm{P}_0) & f_{xy}(\mathrm{P}_0) \\ f_{yx}(\mathrm{P}_0) & f_{yy}(\mathrm{P}_0) \end{vmatrix} > 0,\ f_{xx}(\mathrm{P}_0) > 0$ (resp. $f_{xx}(\mathrm{P}_0) < 0$) であるならば f は P_0 で極小（resp. 極大）となります.

(2) $\begin{vmatrix} f_{xx}(\mathrm{P}_0) & f_{xy}(\mathrm{P}_0) \\ f_{yx}(\mathrm{P}_0) & f_{yy}(\mathrm{P}_0) \end{vmatrix} < 0$ ならば f は P_0 で極小でも極大でもありません.

今後当分の間この定理の証明をしながらいろんなことを学びます.

最大・最小の十分条件

最初に示すのは以下の定理です.

定理

$\mathbf{R}^2$ の**開凸集合** U 上の C^2 級関数 $f: U \to \mathbf{R}$ に対して $\mathrm{P}_0(a, b) \in U$ が停留点であるとします：

$$f_x(\mathrm{P}_0) = f_y(\mathrm{P}_0) = 0$$

さらに

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(\mathrm{P}) & f_{xy}(\mathrm{P}) \\ f_{yx}(\mathrm{P}) & f_{yy}(\mathrm{P}) \end{vmatrix} > 0 \quad (\mathrm{P} \in U)$$

$$f_{xx}(\mathrm{P}) > 0 \ (\mathrm{resp.} f_{xx}(\mathrm{P}) < 0) \quad (\mathrm{P} \in U)$$

が成立するならば

$$f(\mathrm{P}) > f(\mathrm{P}_0) \ (\mathrm{resp.} f(\mathrm{P}) < f(\mathrm{P}_0)) \quad (\mathrm{P} \in U,\ \mathrm{P} \neq \mathrm{P}_0)$$

最大・最小の十分条件（1 変数の場合）

定理

開区間 $I :=]a, b]$ 上の C^2 級関数 f が停留点 $c \in]a, b[$ をもちます：

$$f'(c) = 0$$

さらに

$$f''(t) > 0 \quad (t \in]a, b[)$$

が成立します．このとき

$$t \in]a, b[,\ t \neq c \ \Rightarrow f(t) > f(c)$$

が成立します.

Part 04
2変数2次形式の正定値性

対称行列の固有多項式

対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a)(\lambda - b) - c^2 \\ &= \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2 \end{aligned}$$

となります．この 2 次式の判別式は

$$D = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) = (a-b)^2 + 4c^2 \geq 0$$

から2 次の実対称行列の固有値は実数であることが分かります．

対称行列の固有多項式 (2) $D=0$ の場合は？

$$D = 0 \Leftrightarrow a - b = 0,\ c = 0$$

から

$$A\text{の固有多項式が重根を持つ} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2$$

注意　上で $p, q \in \mathbf{R}$ に対して

$$p, q \geq 0, \quad p + q = 0 \ \Rightarrow \ p = q = 0$$

を用いている.

準備 1–2 次形式の正値性

2 次の対称行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c & b \end{smallmatrix}\right)$ を考えます．このとき A の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2$$

は 2 実根 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ を持ちます．また A が定める 2 次形式

$$(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

について以下の定理が成立します.

定理

以下は同値です．**(1)** $(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) > 0 \ \left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0}\right)$
(2) $a > 0$, $\det(A) > 0$
(3) $\alpha, \beta > 0$

準備 1–2 次形式の正値性

(2)⇒ (1)

$$
\begin{aligned}
ax^2 + 2cxy + by^2 &= a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + by^2 - \frac{c^2}{a}y^2 \\
&= a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

が成立します．最後の不等式の等号成立の条件は

$$
\begin{aligned}
a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0 &\Leftrightarrow x + \frac{c}{a}y = y = 0 \\
&\Leftrightarrow x = y = 0
\end{aligned}
$$

から

$$
\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0} \Rightarrow \left(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) > 0
$$

準備 1–2 次形式の正値性

(1)⇒ (2)

$$ax^2 + 2cxy + by^2 > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

において $x = 1, y = 0$ とすると $a > 0$ が従います．さらに

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right) \qquad (*)$$

において $x = -\frac{c}{a}, y = 1$ とすると

$$\frac{ab - c^2}{a} > 0$$

から $\det(A) = ab - c^2 > 0$ であることが分かります．