

## 連立方程式の同値変形

例えば

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & \cdots (i) \\ cx + dy = \beta & \cdots (ii) \end{cases}$$

について考えましょう.  $(i)$  かつ  $(ii)$  から

$$(i)' := p \times (i) + q \times (ii), \quad (ii)' := r \times (i) + s \times (ii)$$

が導けますが、 $(i)$  かつ  $(ii)$  と  $(i)'$  かつ  $(ii)'$  は同値なのかについて考えます。

$$ps - qr \neq 0 \text{ ならば } (i) \text{ かつ } (ii) \Leftrightarrow (i)' \text{ かつ } (ii)'$$

が成立します. これを示しましょう.

$$\begin{aligned} (i)'' &:= A \times (i)' + B \times (ii)' = (Ap + Br) \times (i) + (Aq + Bs) \times (ii) \\ (ii)'' &:= C \times (i)' + D \times (ii)' = (Cp + Dr) \times (i) + (Cq + Ds) \times (ii) \end{aligned}$$

と定めます. ここで  $A = s, B = -q, C = -r, D = p$  と選ぶと

$$\begin{aligned} (i)'' &:= (ps - qr) \times (i) \\ (ii)'' &:= (ps - qr) \times (ii) \end{aligned}$$

となります. 前提  $ps - qr \neq 0$  の元では  $(i)''$  と  $(ii)''$  を  $\frac{1}{ps - qr}$  倍して

$$\begin{aligned} (i)''' &:= \frac{1}{ps - qr} \times (i)'' = (i) \\ (ii)''' &:= \frac{1}{ps - qr} \times (ii)'' = (ii) \end{aligned}$$

となります.

この大変単純な同値変形が線型代数学の理論的な基礎となることを後に知ることになります.

少し一般化しておきます.  $(1), \dots, (n)$  の  $n$  個の方程式が連立されているとします. ここでは  $i \neq j$  のときに  $(i)$  と  $(j)$  の間に上の基本的な同値変形を施すことを考えます. 上で示したことは以下のように一般化されます. すなわち  $ad - bc \neq 0$  のとき

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & & (i) & & \cdots & & (j) & & \cdots \\ & & & & & & \downarrow (\#) & & \\ \cdots & (i)' := a \times (i) + b \times (j) & \cdots & (j)' := c \times (i) + d \times (j) & \cdots & & & & \cdots \end{array}$$

は同値な変形となります (これを示してみましょう).

実はこの形の同値変形には以下の 3 種類の変形があります (ここでも  $i \neq j$  とします).

**(I)**  $(i)$  式の  $\lambda$  倍を  $(j)$  式に加える)

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & & (i) & & \cdots & & (j) & & \cdots \\ & & & & & & \downarrow (*) & & \\ \cdots & (i)' := (i) & \cdots & (j)' := (j) + \lambda \times (i) & \cdots & & & & \cdots \end{array}$$

は同値な変形となります.

**(II)**  $(j)$  式を  $\lambda$  倍  $\lambda \neq 0$  のとき

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & & (i) & & \cdots & & (j) & & \cdots \\ & & & & & & \downarrow (*) & & \\ \cdots & (i)' := (i) & \cdots & (j)' := \lambda(j) & \cdots & & & & \cdots \end{array}$$

は同値な変形となります。

(III) ((i) 式と (j) 式の交換)

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & (i) & \cdots & (j) & \cdots & & \\ & & & \downarrow (*) & & & \\ \cdots & (i)' := (j) & \cdots & (j)' := (i) & \cdots & & \end{array}$$

は同値な変形となります。

**演習問題** 上の (I), (II), (III) の (\*) の逆を求めましょう。

**注意** 上の演習問題にあるように, (I), (II), (III) の (\*) の逆はそれぞれ (I), (II), (III) の形となります。また最初に与えた一般の形の同値編形に出てくる (#) は (I), (II), (III) の形の同値変形の合成として表すことができます。

ここで例を考えましょう。n 次元列ベクトル  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1) \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{b} & (2) \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} = \vec{c} & (3) \end{cases}$$

を満たすとします。ここで

$$\begin{aligned} (1)' &:= (1) \\ (2)' &:= (-2) \times (1) + (2) \quad 3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b} \\ (3)' &:= (-3) \times (1) + (2) \quad \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} \end{aligned}$$

とすると

$$(1) \text{かつ}(2) \text{かつ}(3) \equiv (1)' \text{かつ}(2)' \text{かつ}(3)'$$

となります。これは

$$(1) \text{かつ}(2) \equiv (1)' \text{かつ}(2)', \quad (1) \text{かつ}(3) \equiv (1)' \text{かつ}(3)'$$

が成立するからです。(ここで基本変形 (I) を用いています。)

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1)' \\ 3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b} & (2)' \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (3)' \end{cases}$$

に対して基本変形 (III) を用いて

$$(1)'' := (1)', \quad (2)'' := (3)', \quad (3)'' := (2)'$$

として (1)'かつ(2)'かつ(3)' は

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1)'' \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (2)'' \\ 3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b} & (3)'' \end{cases}$$

となります。(以下は (2)'' の  $\vec{y}$  を用いて (1)'' と (2)'' の  $\vec{y}$  の項をけしていきます。(STLin の第 1 章の演習問題 1.08 を参照)。