第 1 章

ベクトルとその幾何学

1.1　ベクトル

1.1.1　列ベクトル

■定義と演算　以下では実数の全体の集合を $\mathbf{R}$ で表します．$\mathbf{R}$ に値を持つ（実数値の）n 次元ベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$ とは

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

と n 個の実数を縦に並べたものです．$\mathbf{R}$ に値を持つ n 次元ベクトルの全体の集合を $\mathbf{R}^n$ と記します．ここで定めた n 次元ベクトルを，後に 1.1.3 節で定義する行ベクトルと区別して，n 次元**列ベクトル**あるいは n 次元**縦ベクトル**と呼びます．n 次元ベクトルには**足し算**（**加法**），**引き算**（**減法**），**スカラー倍**（**定数倍**）が定義されます．上のベクトル $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbf{R}^n$ と $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x}-\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \\ \vdots \\ x_n-y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

と定めます．

足し算（引き算）とスカラー倍の演算の優先順位について説明して置きます．すな

わち $\vec{x},\ \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ と $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y},\ \lambda\vec{x} - \mu\vec{y}$$

がどのような意味を持つかです．この表現では，まず λ 倍と μ 倍を計算して，それから足し算あるいは引き算をするのが唯一可能な演算の順序です．

(1.1) で定めた $\vec{x}$ に対して上から i 番目の x_i を $\vec{x}$ の**第 i 成分**と呼びます．

演習 1.1. 次のベクトルの計算をしましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$ **(3)** $3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **(4)** $0\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(5) $6\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ **(6)** $9\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ **(7)** $3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

演習 1.2. 4 次元ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して，第 2 成分と第 3 成分が何か答えましょう．

■ゼロベクトル・逆ベクトル　以下では，ベクトルに関する演算をさらに詳しく展開するために，特殊なベクトルを定義します．すべての成分が 0 である n 次元ベクトル

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

を**ゼロベクトル**と呼びます．また (1.1) にある $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して，その**逆ベクトル**を

$$-\vec{x} = (-1)\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

で定義します．ゼロベクトルと逆ベクトルについて公式

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0},\ \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x},\ 0 \cdot \vec{x} = \vec{0} \tag{1.3}$$

が基本的です．ここでは最初の公式を証明します．これは，証明というものに関する学習だと考えましょう．ベクトル $\vec{x}$ に対しては，その第 i 成分を用いて

$$\vec{x} = (x_i)$$

と表記することがあります（すべての成分を第 i 成分で表わしています）．この場合

$$-\vec{x} = (-x_i)$$

となりますから

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (x_i + (-x_i)) = (0)$$

から，$\vec{x} + (-\vec{x})$ の第 i 成分が 0 であることが分かります．よって

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$$

であることが分かります.

演習 1.3. (1.3) の残りの公式を証明しましょう.

ベクトル $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対してその差 $\vec{x} - \vec{y}$ を (1.2) において定義しました．逆ベクトルとの関係では

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y}) \tag{1.4}$$

が成立します.

演習 1.4. (1.4) を証明しましょう.

■標準単位ベクトル　n 次元ベクトル $\vec{e}_i \in \mathbf{R}^n$ は第 i 成分が 1 で，他のすべての成分が 0 であるベクトル

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第}i\text{成分} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

で，このベクトルを**標準単位ベクトル**と呼びます．$n = 3$ の場合は

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

となります.

1.1.2　ベクトルの加法・スカラー倍

ベクトルの足し算とスカラー倍に関する基本的な定理 1.1 を述べましょう.

定理 1.1. **(1)** $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{1.6}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \tag{1.7}$$

が成立します.
(2) $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ と $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lambda\,(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a} \tag{1.8}$$

$$(\lambda+\mu)\,\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a} \tag{1.9}$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b} \tag{1.10}$$

が成立します.

Proof. **(1)** (1.6) と (1.7) を証明しましょう．$\vec{a}=(a_i)$，$\vec{b}=(b_i)$，$\vec{c}=(c_i)$ と各ベクトルをその第 i 成分を用いて表現しましょう．すると

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_i+b_i)\,,\quad \vec{b}+\vec{a}=(b_i+a_i)$$

から $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ が分かります．また

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}&=((a_i+b_i)+c_i)=(a_i+b_i+c_i)\\ \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})&=(a_i+(b_i+c_i))=(a_i+b_i+c_i)\end{aligned}$$

から $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ が従います.

(2) 演習 1.5 とします. □

演習 1.5. 定理 *1.1* の **(2)** を証明しましょう.

この定理 1.1 の意味するところを述べましょう.

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$$

と 4 つの n 次元ベクトルを加えることを考えます．公式 (1.7) をベクトルの足し算（加法）の**結合法則**と呼びますが，この法則が，この表記が意味する可能性のある

$$\Big((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}\Big)+\vec{d}$$

でも

$$\vec{a}+\Big((\vec{b}+\vec{c})+\vec{d}\Big)$$

でも計算結果が変わらないことを保証してくれます．

(1.5) で定めた 3 次元の標準単位ベクトルを用いると，3 次元ベクトル $\vec{a}\in\mathbf{R}^3$ は

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

と分解されることに注意しましょう．

演習 1.6. $\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3 \in \mathbf{R}^3$ のスカラー倍の和で表しましょう．

演習 1.7. $\vec{a},\ \vec{b}\in\mathbf{R}^n$ に対して次の計算をしましょう．
(1) $(2\vec{a}-\vec{b})+4\vec{a}-2\vec{b}$　**(2)** $3(2\vec{a}+\vec{b})-2(4\vec{a}-2\vec{b})$

演習 1.8. $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z},\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\in\mathbf{R}^n$ が関係式

$$\begin{cases} \vec{x}-\vec{y}+2\vec{z}=\vec{a} \\ 2\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}=\vec{b} \\ 3\vec{x}-2\vec{y}+\vec{z}=\vec{c} \end{cases}$$

満たしているとします．このとき $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ で表しましょう．（*78* ページの演習 *3.13* で同じ問題を考えます．）

1.1.3　行ベクトル

列ベクトルは実数を縦に並べたものでした．これに対して，実数を n 個を横に並べた

$$\boldsymbol{a}=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n),\quad \boldsymbol{b}=(b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)$$

を n 次元**行ベクトル**または n 次元**横ベクトル**と呼び，必要に応じて使います．本書では，原則として横ベクトルを太文字で書くことにします．また，n 次元行ベクトル全体の集合を $(\mathbf{R}^n)^*$ と記します[*1]．行ベクトルは，ベクトルの内積や行列を学ぶときに用います.

行ベクトルに対しても足し算，引き算，スカラー倍を

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1\ \cdots\ a_n+b_n),\quad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1\ \cdots\ a_n-b_n)$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1\ \cdots\ \lambda a_n)$$

と定義します.

同じ次元の行ベクトルと列ベクトルは掛けることができます．すなわち

$$\boldsymbol{a}=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)\in(\mathbf{R}^n)^*,\quad \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n$$

の行ベクトルと列ベクトルの組に対して

$$\boldsymbol{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \tag{1.11}$$

と**掛け算**を定義できます．この掛け算を用いて以下のように写像を定めます．すなわち $\boldsymbol{a}=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)\in(\mathbf{R}^n)^*$ に対して写像 $\Phi_{\boldsymbol{a}}$ を

$$\Phi_{\boldsymbol{a}}:\ \mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}\quad \vec{x}\mapsto\boldsymbol{a}\vec{x} \tag{1.12}$$

によって定義します．$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n$ に対して $\Phi_{\boldsymbol{a}}(\vec{x})$ は

$$\Phi_{\boldsymbol{a}}(\vec{x})=\boldsymbol{a}\vec{x}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

と x_1，$\cdots$，x_n の**斉次 1 次式**で表されることに注意します．このことを用いると次の定理 1.2 が証明できます.（上の (1.12) において $\mapsto$ は定義域の $\vec{x}$ に対して値域の $\boldsymbol{a}\vec{x}$ が対応していることを意味します.）

[*1] $(\mathbf{R}^n)^*$ の ‘*’ は双対空間を意味しますが，本書ではこれについて解説しません.

定理 1.2. (1.12) の写像 $\Phi_{\boldsymbol{a}}$ は

$$\Phi_{\boldsymbol{a}}(\vec{x}+\vec{y}) = \Phi_{\boldsymbol{a}}(\vec{x}) + \Phi_{\boldsymbol{a}}(\vec{y}) \quad (\vec{x},\ \vec{y} \in \mathbf{R}^n) \tag{1.13}$$

$$\Phi_{\boldsymbol{a}}(\lambda\vec{x}) = \lambda\Phi_{\boldsymbol{a}}(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n,\ \lambda \in \mathbf{R}) \tag{1.14}$$

を満たします.

Proof. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ に対して $\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$, $\lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ ですから

$$\Phi_{\boldsymbol{a}}(\vec{x}+\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} a_i(x_i+y_i) = \sum_{k=1}^{n} a_i x_i + \sum_{k=1}^{n} a_i y_i = \Phi_{\boldsymbol{a}}(\vec{x}) + \Phi_{\boldsymbol{a}}(\vec{y})$$

$$\Phi_{\boldsymbol{a}}(\lambda\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_i(\lambda x_i) = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_i x_i = \lambda\Phi_{\boldsymbol{a}}(\vec{x})$$

が従います. □

写像 $\Phi_{\boldsymbol{a}}$ に対して (1.13) と (1.14) を**線型性** (*linearity*) といいます. これは写像 $\Phi_{\boldsymbol{a}}$ が列ベクトルの加法'+' およびスカラー倍'·' と交換することを意味します. 今から様々な形で登場する線型性は本書の底流をなす重要な概念です. この単純な定理 1.2 ですが, 例えば, 後に行列式の性質を調べるのに用いることになります.

定理 1.2 の形は少し大袈裟ですが, $\boldsymbol{a} \in (\mathbf{R}^n)^*$ と $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\boldsymbol{a}(\vec{x}+\vec{y}) = \boldsymbol{a}\vec{x} + \boldsymbol{a}\vec{y}, \quad \boldsymbol{a}(\lambda\vec{x}) = \lambda(\boldsymbol{a}\vec{x}) \tag{1.15}$$

が成立することです. これと同様に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in (\mathbf{R}^n)^*$ と $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\vec{x} = \boldsymbol{a}\vec{x} + \boldsymbol{b}\vec{x}, \quad (\lambda\boldsymbol{a})\vec{x} = \lambda(\boldsymbol{a}\vec{x}) \tag{1.16}$$

が成立します.

演習 1.9. (1.16) を証明しましょう.

演習 1.10. $\boldsymbol{a} \in (\mathbf{R}^n)^*$ とします．

$$\Phi_{\boldsymbol{a}}(\vec{x}) = 0$$

がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して成立するならば $\boldsymbol{a} = \mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ が成立することを示しましょう．

1.1.4　ベクトルの転置

列ベクトルを行ベクトルにしたり，行ベクトルを列ベクトルにしたりすることも必要になります．これを**転置**の記号 ^{t} を用いて表します (記号 ^{t} の t は transposition の t です)．すなわち

$$^t\left(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n\right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad {}^t\!\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n\right)$$

と記します．

次にベクトルの転置に関して基本的な性質をまとめた定理 1.3 を述べます．この定理 1.3 は，転置とベクトルの足し算・スカラー倍の演算が交換することを意味し（転置の線型性），後に行列の転置に関する基本的な公式 (1.28)（定理 1.5）を証明するのに用います．また，列ベクトルを成分を用いて表現すると紙面を多く必要としますので，行ベクトルの転置として表します．

定理 1.3. (1) $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ と $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して

$$^t(\vec{a} + \vec{b}) = {}^t\vec{a} + {}^t\vec{b}, \quad {}^t(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot {}^t\vec{a}, \quad {}^t\left({}^t\vec{a}\right) = \vec{a}$$

が成立します．

(2) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \in (\mathbf{R}^n)^*$ と $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して

$$^t(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a} + {}^t\boldsymbol{b}, \quad {}^t(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda{}^t\boldsymbol{a}, \quad {}^t\left({}^t\boldsymbol{a}\right) = \boldsymbol{a}$$

が成立します．

Proof. **(1)** のみを証明します.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\ \text{とすると}\ \vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ \vdots\\ a_n+b_n\end{pmatrix},\ \lambda\vec{a}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\ \vdots\\ \lambda a_n\end{pmatrix}$$

から

$$^t\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=(a_1+b_1\ \cdots\ a_n+b_n)={}^t\vec{a}+{}^t\vec{b}$$

$$^t(\lambda\vec{a})=(\lambda a_1\ \cdots\ \lambda a_n)=\lambda(a_1\ \cdots\ a_n)=\lambda{}^t\vec{a}$$

が導けます. □

演習 1.11. $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$ と $\vec{w}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ に対して ${}^t\vec{a}\cdot\vec{w}$ を計算しましょう.

演習 1.12. $\vec{a}_1,\ \cdots,\ \vec{a}_\ell\in\mathbf{R}^n$ と $c_1,\ \cdots,\ c_\ell\in\mathbf{R}$ に対して

$$^t(c_1\vec{a}_1+\cdots+c_\ell\vec{a}_\ell)=c_1{}^t\vec{a}_1+\cdots+c_\ell{}^t\vec{a}_\ell \tag{1.17}$$

を証明しましょう. 行列の転置の基本的な性質に関する定理 *2.8*（*47* ページ）を証明するときに, この式 (1.17) を用います.

1.2 内積とノルム

1.2.1 ベクトルの内積とノルム：定義

上の (1.1) のベクトル $\vec{x},\vec{y}\in\mathbf{R}^n$ に対して, **内積**を

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

と定めます. 記号 '·' が紛らわしいときは

$$(\vec{x},\vec{y}):=\vec{x}\cdot\vec{y}$$

と表示することもあります. また, 統計学を学ぶときには, 内積を

$$^t\vec{x}\cdot\vec{y}=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=(\vec{x},\vec{y}) \tag{1.18}$$

の左辺のように行ベクトルと列ベクトルの積として表示することもよくあります（ここで行ベクトルと列ベクトルの積 (1.11) を用いています）．まとめると

$$ {}^t\vec{x}\vec{y} = (\vec{x}, \vec{y}) \tag{1.19} $$

が $\vec{x},\ \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して成立します.

次に $\vec{x}$ の大きさを

$$ ||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} $$

と定めます．本書ではベクトルの大きさを**ノルム**と呼びます．内積とノルムは

$$ ||\vec{x}||^2 = (\vec{x}, \vec{x}) \tag{1.20} $$

によって関係しています.

演習 1.13. 4 次元ベクトル

$$ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} $$

に対して $(\vec{a}, \vec{b}),\ (\vec{b}, \vec{c}),\ (\vec{c}, \vec{a})$ を計算しましょう．次に $||\vec{a}||,\ ||\vec{b}||,\ ||\vec{c}||$ を計算しましょう.

内積とノルムについて簡単な性質をまとめると次の定理 1.4 になります.

定理 1.4. $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z} \in \mathbf{R}^n$ と $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して

$$ (\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z}) \tag{1.21} $$

$$ (\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z}) \tag{1.22} $$

$$ (\lambda\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y}) \tag{1.23} $$

$$ (\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}) \tag{1.24} $$

$$ ||\lambda\vec{x}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{x}|| \tag{1.25} $$

$$ ||\vec{x}|| \geqq 0, \quad ||\vec{x}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \tag{1.26} $$

定理 1.4 を証明する前に次を復習しましょう.

復習

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Proof. $\vec{x} = (x_i)$, $\vec{y} = (y_i)$, $\vec{z} = (z_i)$ と定理 1.4 に現れるベクトルを第 i 成分により表します．このとき

$$(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$$

$$(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$$

から (1.21) と (1.22) を得ます．次に $\lambda\vec{x} = (\lambda x_i)$, $\lambda\vec{y} = (\lambda y_i)$ と $\lambda\vec{x}$ と $\lambda\vec{y}$ の第 i 成分が表されることを用いると

$$(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \cdot y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$$

$$(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \lambda y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$$

から (1.23) を得ます．また (1.24) は

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = (\vec{y}, \vec{x})$$

と容易に示せます．さらに

$$||\lambda\vec{x}||^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda^2 ||\vec{x}||^2$$

の最左辺と最右辺の平方根は $||\lambda\vec{x}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{x}||$ すなわち (1.25) となります．最後に (1.26) ですが

$$||\vec{x}|| \geq 0 \text{ および } \vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow ||\vec{x}|| = 0$$

は明らかです．一般に

非負の実数 $A_1, \cdots, A_n \geq 0$ に対して

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 0 \Longrightarrow A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0 \tag{1.27}$$

であることに注意します．すると $||\vec{x}|| = 0$ を仮定すると

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0, \quad x_i^2 \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

から $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ すなわち $\vec{x} = 0$ が従います． □

演習 1.14. (1.27) を $n = 2$ の場合に証明しましょう．一般の n の場合を数学的帰納法により証明しましょう．

演習 1.15. 大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**と呼びます．$\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{x} \neq \vec{0}$ であるとき $\vec{x}_0 = \dfrac{1}{||\vec{x}||}\vec{x}$ が単位ベクトルとなることを証明しましょう．

今後よく用いる公式 (1.28) を定理 1.5 で与えましょう．これを用いると，ベクトルとその内積・ノルムを用いて思考することが容易になります．

定理 1.5. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{x} \pm \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 \pm 2(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2 \tag{1.28}$$

が成立します．

公式 (1.28) を証明しましょう．(1.20) など上で述べた性質を用いると

$$\begin{aligned}
||\vec{x} + \vec{y}||^2 &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \quad ((1.20)\text{ から}) \\
&= (\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \quad ((1.21)\text{ から}) \\
&= (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) \quad ((1.22)\text{ から}) \\
&= (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \quad ((1.23)\text{ から}) \\
&= ||\vec{x}||^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2 \quad ((1.20)\text{ から})
\end{aligned}$$

と証明できます．

演習 1.16. $\vec{a} = {}^t(1\ \ -1\ \ 3)$, $\vec{b} = {}^t(2\ \ 1\ \ -1)$ に対して

$$f(t) = ||\vec{b} - t\vec{a}||^2$$

を考えます．このとき公式 (1.28) を用いて $f(t)$ の最小値を求めましょう．

演習 1.17. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$|| \ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \ ||^2 = || \ \vec{a} \ ||^2 + || \ \vec{b} \ ||^2 + || \ \vec{c} \ ||^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + 2(\vec{c}, \vec{a})$$

を示しましょう．

1.3　ベクトルの垂直

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が**垂直**である（**直交**する）とは

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

であるときを意味します．このとき $\vec{x} \perp \vec{y}$ と記します．この節では，ベクトルの垂直と内積の関係を説明するのに留めます．内積の幾何学的な意味については 1.6 節で補足します．

演習 1.18. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ とします．$\vec{a} \perp \vec{b}$, かつ $\vec{a} \perp \vec{c}$ ならば

$$\vec{a} \perp (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c})$$

が成立することを示しましょう．

演習 1.19. $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して垂直であるとします．すなわち

$$(\vec{a}, \vec{x}) = 0 \qquad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

が成立するとします．このとき $\vec{a} = \vec{0}$ であることを示しましょう．

演習 1.20. $\vec{f_1},\ \vec{f_2},\ \vec{f_3} \in \mathbf{R}^n$ が

$$(\vec{f_i}, \vec{f_j}) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとします．このとき $\vec{f_1},\ \vec{f_2},\ \vec{f_3}$ は**正規直交系**であるといいます．
(1) $||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 = x^2 + y^2$, $||x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$ を示しましょう．
(2) $\vec{g} \in \mathbf{R}^n$ に対して $||\vec{g} - x\vec{f_1} - y\vec{f_2}||^2 = ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2})$,

$$||\vec{g} - x\vec{f_1} - y\vec{f_2} - z\vec{f_3}||^2 = ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2}) - 2z(\vec{g}, \vec{f_3})$$

を示しましょう．

1.4　ベクトルの平行

また $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が**平行**であるとは

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \vec{0}$$

がある $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ に対して成立するときです．$(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ とは $\lambda \neq 0$ または $\mu \neq 0$ のときで，例えば $\lambda \neq 0$ であるときは

$$\vec{x} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{y}$$

となり，$\mu \neq 0$ のときは

$$\vec{y} = -\frac{\lambda}{\mu}\vec{x}$$

となります．これは，$n = 2$（2 次元）および $n = 3$（3 次元）の場合，ベクトルの平行に関する定義に他なりません．$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が平行であるとき $\vec{x} \parallel \vec{y}$ と記します．

2 本の実ベクトル $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が平行でない必要十分条件は（$\vec{x} \nparallel \vec{y}$ と記します）

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \vec{0} \implies \lambda = \mu = 0$$

です．この条件は後に $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が**線型独立**（**1 次独立**）であることの定義となり，さらに，この定義が一般の本数のベクトルに対して拡張されます（133 ページの定義 5.3 参照）．

演習 1.21. **(1)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であるとき μ を求めましょう．

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行とならないことを示しましょう．

演習 1.22. $\vec{a},\ \vec{0} \in \mathbf{R}^n$ は常に平行であることを証明しましょう．

演習 1.23. $\vec{x},\ \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が平行でないとします．このとき次を示しましょう．

$$\vec{x} \nparallel (\lambda\vec{x} + \vec{y}), \quad (\vec{x} + \vec{y}) \nparallel (\vec{x} - \vec{y})$$

ここで演習 1.23 を一般化します．そのために $\vec{x},\ \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が平行でないとします．そして

$$\vec{\alpha} = a_1\vec{x} + b_1\vec{y}, \quad \vec{\beta} = a_2\vec{x} + b_2\vec{y} \tag{1.29}$$

と定めます．このとき次の定理 1.6 が成立します．

定理 1.6.

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta := a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

この定理 1.6 の証明のために次の補助定理 1.4 を証明します．

補助定理 1.1. **(1)** $\Delta := a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ を仮定します．このとき

$$\begin{cases} a_1x + a_2y &= &0 &\cdots(\mathrm{P}) \\ b_1x + b_2y &= &0 &\cdots(\mathrm{Q}) \end{cases}$$

が成立するならば $x = y = 0$ を得ます．
(2) $\Delta := a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ を仮定します．このときある $(x, y) \neq (0, 0)$ に対して **(1)** の連立 1 次方程式 *(P)* かつ *(Q)* が成立します．

Proof.（**補助定理 1.4 の証明**）　**(1)** $(\mathrm{P})\times b_2-(\mathrm{Q})\times a_2$ と $(\mathrm{P})\times b_1-(\mathrm{Q})\times a_1$ から

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = 0, \quad -(a_1b_2 - a_2b_1)y = 0$$

が従いますから，$\Delta := a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ のとき $x = y = 0$ が従います．
(2) $\Delta := a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ のとき $(x, y) = (b_2, -b_1)$ は連立 1 次方程式 (P) かつ (Q) を満たします．同様に $(x, y) = (a_2, -a_1)$ は連立 1 次方程式 (P) かつ (Q) を満たします．

したがって，$(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ または $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$ が成立するときは，連立 1 次方程式 (P) かつ (Q) に $(x, y) \neq (0, 0)$ を満たす解が存在することが分かります．

さらに条件「$(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ または $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$」が成立しないときは，$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ ですから，この場合は $(x, y) \neq (0, 0)$ を満たす任意の (x, y) が連立 1 次方程式 (P) かつ (Q) の解となります．　□

さらに補助定理 1.4 を用いて定理 1.6 を証明します．

Proof.（**定理 1.6 の証明**）　$(\Leftarrow)$ まず $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ を仮定します．$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ を示すために

$$\xi\vec{\alpha} + \eta\vec{\beta} = \vec{0}$$

を仮定します．このとき

$$\xi\vec{\alpha}+\eta\vec{\beta}=(\xi a_1+\eta a_2)\vec{x}+(\xi b_1+\eta b_2)\vec{y}=\vec{0}$$

が成立しますが，$\vec{x}\nparallel\vec{y}$ から

$$\xi a_1+\eta a_2=\xi b_1+\eta b_2=0$$

が従います．ここで仮定 $\Delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ が成立しますから $\xi=\eta=0$ を得ます (補助定理 1.4)．
($\Rightarrow$) 対偶を証明します．そのために $\Delta=a_1b_2-a_2b_1=0$ を仮定します．このとき補助定理 1.4 により，$(\xi,\eta)\neq(0,0)$ を満たす (ξ,η) に対して

$$\xi a_1+\eta a_2=\xi b_1+\eta b_2=0$$

が成立します．このとき

$$\xi\vec{\alpha}+\eta\vec{\alpha}=(\xi a_1+\eta a_2)\vec{x}+(\xi b_1+\eta b_2)\vec{y}=\vec{0}$$

が成立しますから，$\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$ が成立します． □

1.5 Cauchy-Schwarz の不等式

■Cauchy-Schwarz の不等式　2 本のベクトルの間の内積は，それぞれのノルムの積で絶対値が押さえられます．

定理 1.7. 任意の実ベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}\in\mathbf{R}^n$ に対して不等式

$$|(\vec{x},\vec{y})|\leqq||\vec{x}||\cdot||\vec{y}|| \tag{1.30}$$

が成立します．

この不等式は，実用的に大変に有用です．実際，統計学の相関係数と関係してきます．

不等式 (1.30) の証明を与えましょう．

すべての $\lambda\in\mathbf{R}$ に対して

$$0\leqq||\lambda\vec{x}-\vec{y}||^2=\lambda^2||\vec{x}||^2-2\lambda(\vec{x},\vec{y})+||\vec{y}||^2$$

が成立します．この式の右辺は λ の 2 次式になります．その 2 次の係数に関して場合を分けて考えます．

(i) $||\vec{x}|| = 0$ のとき　$\vec{y} = \vec{0}$ から，明らかに

$$(\text{左辺}) = |(\vec{0}, \vec{y})| = 0, \quad (\text{右辺}) = ||\vec{0}|| \cdot ||\vec{y}|| = 0$$

となり，不等式 (1.30) が成立します．

(ii) $||\vec{x}|| \neq 0$ のとき　$||\vec{x}||^2 > 0$ ですから λ の関数

$$F(\lambda) = \lambda^2 ||\vec{x}||^2 - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2$$

は，グラフは下に凸の放物線になります．2 次式の判別式の理論

> $A > 0$ とするとき
>
> $$At^2 + 2Bt + C \geq 0 \ \Leftrightarrow D/4 = B^2 - AC \leq 0$$

を用いると，すべての $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して $F(\lambda) \geqq 0$ であることから，

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 - ||\vec{x}||^2 ||\vec{y}||^2 \leqq 0$$

であることが分かります．これから (1.30) が従います．

■Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立条件　$\vec{x} \neq 0$ のとき

$$f(a) = ||\vec{y} - a\vec{x}||^2$$

の最小値を求めてみましょう．

$$\begin{aligned} f(a) &= a^2 ||\vec{x}||^2 - 2a(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 \left(a^2 - 2\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2} a + \frac{||\vec{y}||^2}{||\vec{x}||^2} \right) \\ &= ||\vec{x}||^2 \left\{ \left(a - \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2} \right)^2 + \frac{||\vec{y}||^2}{||\vec{x}||^2} - \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{||\vec{x}||^4} \right\} \end{aligned}$$

ですから $a = \dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2}$ であるときに $f(a)$ は最小値

$$||\vec{y}||^2 - \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{||\vec{x}||^2} = \frac{1}{||\vec{x}||^2} \left(||\vec{x}||^2 ||\vec{y}||^2 - (\vec{x}, \vec{y})^2 \right) \tag{1.31}$$

を取ります．

このことから，Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立条件について考えてみましょう．すなわち

$$|(\vec{x}, \vec{y})| = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \tag{1.32}$$

が成立する場合について考えます．このとき，等式 (1.31)，すなわち

$$\left\| \vec{y} - \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2}\vec{x} \right\|^2 = \frac{1}{||\vec{x}||^2}\left(||\vec{x}||^2||\vec{y}||^2 - (\vec{x}, \vec{y})^2\right)$$

において，右辺が 0 ですから $\vec{y} = \dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||^2}\vec{x}$ が成立します．よって (1.32) から

$$\vec{x} \parallel \vec{y}$$

が成立することが分かりました（以上は $\vec{x} \neq \vec{0}$ の場合を考えていましたが，$\vec{x} = \vec{0}$ のときは (1.32) も $\vec{x} \parallel \vec{y}$ も成立します）．

逆に $\vec{x} \parallel \vec{y}$ を仮定します．このとき，

$$||\vec{y}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{x}|| \quad \text{または} \quad ||\vec{x}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{y}||$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．$||\vec{y}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{x}||$ のとき

$$||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| = ||\vec{x}|| \cdot |\lambda| ||\vec{x}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{x}||^2, \quad |(\vec{x}, \vec{y})| = |(\vec{x}, \lambda\vec{x})| = |\lambda| \cdot ||\vec{x}||^2$$

より，

$$|(\vec{x}, \vec{y})| = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$$

が成立します（$\vec{x}$ と $\vec{y}$ の対称性から，$||\vec{x}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{y}||$ の場合も同様です）．

以上をまとめて次の定理 1.8 を示しました．

定理 1.8.（Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立条件） n 次元ベクトル $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に関して

$$|(\vec{x}, \vec{y})| = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \Longleftrightarrow \vec{x} \parallel \vec{y}$$

が成立します．

■三角不等式　$\vec{x},\ \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して**三角不等式**

$$||\vec{x}+\vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$$

が成立します．実際

$$\begin{aligned} ||\vec{x}+\vec{y}||^2 &\leq ||\vec{x}||^2 + 2(\vec{x},\vec{y}) + ||\vec{y}||^2 \\ &\leq ||\vec{x}||^2 + 2||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| + ||\vec{y}||^2 = (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2 \end{aligned}$$

から従います．ここで Cauchy-Schwarz の不等式 (1.30) を用いていることに注意しましょう．

1.6　正射影ベクトル

1.5 節（17 ページ〜）において，$\vec{x} \neq \vec{0}$ を満たす実ベクトル $\vec{x}$ に対して，$a \in \mathbf{R}$ の関数

$$f(a) = ||\vec{y} - a\vec{x}||^2$$

が最小値を

$$a = a_0 = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}$$

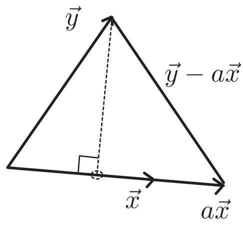
のときに取ることを示しました．この場合はどのような場合かを考えてみましょう．

最初に，2 次元と 3 次元の場合を考えます．この場合は，2 つのベクトルのなす角が意味を持ちます．一般に $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbf{R}^n$ のなす角が θ であるとき

$$(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = ||\vec{\alpha}|| \cdot ||\vec{\beta}|| \cos\theta$$

が成立します．これを用いると，右図から幾何学的に

$$\vec{y} - a\vec{x} \perp \vec{x}$$



が成立するときに $||\vec{y} - a\vec{x}||$ が最小になることが分かります．実際

$$0 = (\vec{y} - a\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{y},\vec{x}) - a(\vec{x},\vec{x}) = (\vec{y},\vec{x}) - a||\vec{x}||^2$$

が成立しますから

$$a = a_0 = \frac{(\vec{y},\vec{x})}{||\vec{x}||^2}$$

のとき $f(a)$ が最小になることを（2 次元と 3 次元の場合に）幾何学的に示したことになります.

一般の次元でも，$f(a)=||\vec{y}-a\vec{x}||^2$ の最小値を取る $a=a_0=\frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}$ の場合

$$(\vec{x},\vec{y}-a\vec{x})=(\vec{x},\vec{y})-a(\vec{x},\vec{x})=(\vec{x},\vec{y})-\frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}||\vec{x}||^2=(\vec{x},\vec{y})-(\vec{x},\vec{y})=0$$

から

$$\vec{y}-a\vec{x}\perp\vec{x}$$

であることが分かります．ここで

$$\frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}\vec{x}=\left(\frac{1}{||\vec{x}||}\vec{x},\vec{y}\right)\cdot\frac{1}{||\vec{x}||}\vec{x}$$

のことを $\vec{y}$ の $\vec{x}$ 方向への**正射影ベクトル**（**直交射影ベクトル**）と定義します.

演習 1.24. 次のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に対して，$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向の正射影を求めましょう.

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ **(3)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$

1.7　2 次元部分空間

1.7.1　座標とは

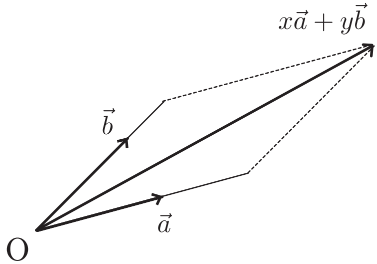
■定義と座標　平行でない n 次元ベクトル $\vec{a},\ \vec{b}\in\mathbf{R}^n$ を考えます（この 1.7 節では $n=3$ と考えても構いません）．このとき

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}\ \Rightarrow\ \lambda=\mu=0$$

が成立します．このとき $\mathbf{R}^n$ の部分集合

$$V:=\{x\vec{a}+y\vec{b}\in\mathbf{R}^n;\ x,y\in\mathbf{R}\}$$

を考えます．この V を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が生成する（張る）2 次元**部分空間**と呼びます．また $V=L(\vec{a},\vec{b})$ または $V=\mathbf{R}\vec{a}+\mathbf{R}\vec{b}$ と記すこともあります.



後に 5.1 節で部分空間をより一般的に導入しますが，その基本的な性質は，V に属するベクトルが足し算およびスカラー倍で V の中に留まることです．すなわち

$$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 \in V \ \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V,\ \lambda\vec{v}_1 \in V$$

が成立していることです．この性質は

$$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 \in V \ \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V$$

と必要十分です（このとき V は足し算，スカラー倍に関して閉じているといいます）．
実際，$\vec{v}_1$，$\vec{v}_2 \in V$ とすると

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}, \quad \vec{v}_2 = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$

が成立して

$$\begin{aligned}\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 &= \lambda(x_1\vec{a} + y_1\vec{b}) + \mu(x_2\vec{a} + y_2\vec{b}) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_2)\vec{a} + (\lambda y_1 + \mu y_2)\vec{b} \in V\end{aligned}$$

が分かります．

これまでは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないことを用いていませんでした．$\vec{v} \in V$ が

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$$

と 2 通りに表現されていたとします．このとき

$$(x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{0}$$

から $x = x'$ かつ $y = y'$ が成立します．このことから

$$\varphi:\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow V \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x\vec{a} + y\vec{b}$$

が（次のページに説明してある）全単射であることが分かります．これは V のベクトル $\vec{v}$ を決めると $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ がただ 1 つ定まることを意味します．
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を**基底** $\vec{a}$, $\vec{b}$ による $\vec{v}$ の**座標**と呼びます．

写像の単射・全射　集合 X から集合 Y への写像

$$f:\ X \longrightarrow Y$$

があるとします．このとき f が**単射**であるとは

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \tag{1.33}$$

が成立することです．また f が**全射**であるとは，任意の $y \in Y$ に対して

$$f(x) = y$$

である $x \in X$ が存在することです． f が単射でかつ全射であるとき f は**全単射**であるといいます．

■座標変換　次に

$$\vec{\alpha} = \vec{a},\ \vec{\beta} = \vec{a} + \vec{b} \tag{1.34}$$

である $\vec{\alpha},\ \vec{\beta} \in V$ を考えます．定理 1.6 を用いると

$$1 \cdot a - 0 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

から $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ であることに注意しましょう．また

$$V' := L(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \{\xi\vec{\alpha} + \eta\vec{\beta} \in \mathbf{R}^n;\ \xi, \eta \in \mathbf{R}\}$$

と定めると $\vec{\alpha},\ \vec{\beta} \in V$ から

$$\xi\vec{\alpha} + \eta\vec{\beta} \in V$$

となり，$V' \subset V$ であることが分かります．逆に (1.34) から従う

$$\vec{a} = \vec{\alpha},\ \vec{b} = \vec{\beta} - \vec{\alpha} \tag{1.35}$$

から任意の $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} \in V$ に対して

$$\vec{v} = x\vec{\alpha} + y(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = (x - y)\vec{\alpha} + y\vec{\beta} \in V'$$

が成立して，$V \subset V'$ であることが分かります．以上で

$$L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$$

であることが示されました．これによって V の基底として $\vec{a},\ \vec{b}$ ではなくて $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ と取ってもよいことが分かります.

以上の計算から

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{\alpha} + \eta\vec{\beta}$$

が成立するとき

$$\begin{cases} \xi &= x - y \\ \eta &= y \end{cases}$$

が成立することも分かります．これを，基底 $\vec{a},\ \vec{b}$ から基底 $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ の取り換えに伴う

座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ の間の**座標変換**

といいます.

以上で示したことを一般的にした演習 1.25 を考えましょう.

演習 1.25. $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ は平行でないとして，$\vec{p},\ \vec{q} \in L(\vec{a},\vec{b})$ を

$$\vec{p} = c_1\vec{a} + d_1\vec{b}, \quad \vec{q} = c_2\vec{a} + d_2\vec{b}$$

と定めます．ここで $\Delta := c_1d_2 - c_2d_1 \neq 0$ と仮定します.

(1) 等式 $\vec{a} = \dfrac{1}{\Delta}(d_2\vec{p} - d_1\vec{q}),\ \vec{b} = \dfrac{1}{\Delta}(-c_2\vec{p} + c_1\vec{q})$ を示しましょう.

(2) $L(\vec{a},\vec{b}) = L(\vec{p},\vec{q})$ を示しましょう.

(3) $x\vec{a} + y\vec{b} = s\vec{p} + t\vec{q}$ であるとき

$$s = \frac{1}{\Delta}(xd_2 - yc_2), \qquad t = \frac{1}{\Delta}(-xd_1 + yc_1)$$

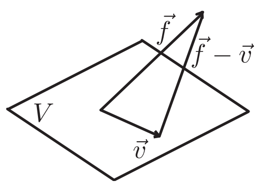
と座標変換の公式が得られることを示しましょう.

1.7.2　Gram-Schmidt の直交化（入門）

■問題　これまでと同様に $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ である $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ を考えます．$\vec{f} \in \mathbf{R}^n$ に対して

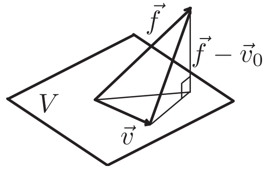
$$||\vec{f} - \vec{v}||^2$$

を最小にする $\vec{v} \in V = L(\vec{a},\vec{b})$ を求めることを考えましょう.



右図のように $n=3$ の場合を想定すれば，直観的に

$$(\vec{f}-\vec{v}_0)\perp V \tag{1.36}$$



を満たす $\vec{v}_0\in V$ 対して最小値を取ります．実際，(1.36) は

$$(\vec{f}-\vec{v}_0)\perp\vec{v}\quad(\vec{v}\in V)$$

を意味しますから，任意の $\vec{v}\in V$ に対して，$\vec{v}-\vec{v}_0\in V$ となることから

$$(\vec{f}-\vec{v}_0,\vec{v}-\vec{v}_0)=0$$

が成立することに注意しましょう．右上図で直角と記されている角に着目してください．このとき

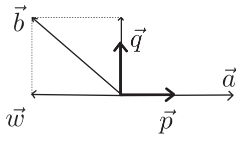
$$\begin{aligned}||\vec{f}-\vec{v}||^2&=||\vec{f}-\vec{v}_0+\vec{v}_0-\vec{v}||^2\\&=||\vec{f}-\vec{v}_0||^2+||\vec{v}_0-\vec{v}||^2\geq||\vec{f}-\vec{v}_0||^2\end{aligned}$$

から $\vec{v}=\vec{v}_0$ のとき最小であることが分かります．

■Gram-Schmidt の直交化　次に $\vec{v}_0$ を求める方法を説明します．そのために，V に対して特殊な基底の取り換えを行います．

前提である $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ から $\vec{a}\neq\vec{0}$ であることが分りますから，

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\cdot\vec{a}$$



と定めます．このとき $||\vec{p}||=1$ となります．

次に，$\vec{b}$ の $\vec{p}$ 方向への正射影

$$\vec{w}=(\vec{b},\vec{p})\vec{p}=\frac{(\vec{b},\vec{a})}{||\vec{a}||^2}\cdot\vec{a}$$

とすると $\vec{b}-\vec{w}\perp\vec{p}$ となります．$\vec{b}-\vec{w}=\vec{0}$ であると $\vec{b}=*\vec{a}$ となり前提である $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ に反しますから，$\vec{b}-\vec{w}\neq\vec{0}$ が成立します（ここで $*\vec{a}$ は $\vec{a}$ の定数倍を意味します）．このことから

$$\vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\left(\vec{b}-\frac{(\vec{b},\vec{a})}{||\vec{a}||^2}\cdot\vec{a}\right)$$

と定めることができます．このとき $||\vec{q}||=1$ で

$$\vec{p}\perp\vec{q}$$

が成立します．ここで演習 1.25 を用いると

$$V = L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{p}, \vec{q})$$

が成立します．しかも

$$||\vec{p}|| = ||\vec{q}|| = 1, \quad (\vec{p}, \vec{q}) = 0 \tag{1.37}$$

が成立します．(1.37) を満たす基底を 2 次元部分空間 V の**正規直交基底**と呼びます．また平行でない $\vec{a}$, $\vec{b}$ から $\vec{p}$, $\vec{q}$ を求める方法を **Gram-Schmidt の直交化**と呼びます．

以上の準備の下で $\vec{v}_0$ を求めましょう．$\vec{v}_0 = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}$ とすると

$$(\vec{f} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}, \vec{p}) = (\vec{f} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}, \vec{q}) = 0$$

から

$$\xi = (\vec{f}, \vec{p}), \quad \eta = (\vec{f}, \vec{q})$$

が従います．これで

$$\vec{v}_0 = (\vec{f}, \vec{p}) \cdot \vec{p} + (\vec{f}, \vec{q}) \cdot \vec{q}$$

であることが分かりました．5.4 節では，別の解法について学びます．また，より一般的な Gram-Schmidt の直交化に関しては 5.5 節で学びます．

演習 1.19 を用いると

$$\begin{aligned} ||\vec{f} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}||^2 &= ||\vec{f}||^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2\xi(\vec{f}, \vec{p}) - 2\eta(\vec{f}, \vec{q}) \\ &= (\xi - (\vec{f}, \vec{p}))^2 + (\eta - (\vec{f}, \vec{q}))^2 + ||\vec{f}||^2 - (\vec{f}, \vec{p})^2 - (\vec{f}, \vec{q})^2 \end{aligned}$$

から $||\vec{f} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}||^2$ は $\xi = (\vec{f}, \vec{p})$, $\eta = (\vec{f}, \vec{q})$ で最小値 $||\vec{f}||^2 - (\vec{f}, \vec{p})^2 - (\vec{f}, \vec{q})^2$ を取ることが分かります．

演習 1.26. 演習 *1.24* の **(3)** の $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を考えます．$\vec{g} = {}^t(1\ 0\ 0\ 0)$ に対して $\vec{g}$ の $L(\vec{a}, \vec{b})$ への正射影ベクトル $\vec{v}_0$ を求めましょう．

第 2 章

行列

2.1 行列

$m \times n$ **行列** (*matrix*) A とは n 個の m 次元列ベクトル $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \cdots, \vec{a}_j,\ \cdots\ \vec{a}_n \in \mathbf{R}^m$ を

$$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ \cdots\ \ \vec{a}_j\ \ \cdots\ \ \vec{a}_n)$$

と横に並べた（束ねた (bundle)）ものです．$\vec{a}_j$ のことを A の j **列** (*column*) と呼びます．各列を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \cdots, \vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \cdots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

と**成分表示**すると

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と表示されます．ここで a_{ij} のことを A の (i,j) **成分**または i 行 j 列と呼びます．以上の**列ベクトル表示**に加えて i **行** (row)

$$\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$$

を用いた A の**行ベクトル表示**

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

も用います．

演習 2.1. 5×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 \end{pmatrix}$$

に対して $(2,3)$ 成分，$(4,2)$ 成分，3 列，4 行は何か答えましょう．

2.2　行列の和・差とスカラー倍

同じ**型**を持つ，すなわち同じ行数，列数を持つ行列の間には足し算（加法）と引き算（減法）が定義されます．$m \times n$ 行列，すなわち m 行 n 列の行列

$$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_j \cdots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} = (a_{ij}),\ B = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_j \cdots \vec{b}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} = (b_{ij})$$

に対してその和と差を

$$A+B=\left(\vec{a}_1+\vec{b}_1 \cdots \vec{a}_j+\vec{b}_j \cdots \vec{a}_n+\vec{b}_n\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}=(a_{ij}+b_{ij})$$

$$A-B=\left(\vec{a}_1-\vec{b}_1 \cdots \vec{a}_j-\vec{b}_j \cdots \vec{a}_n-\vec{b}_n\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}=(a_{ij}-b_{ij})$$

と定めます．また定数 $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して A の α 倍を

$$\alpha A=(\alpha\vec{a}_1 \ \cdots \ \alpha\vec{a}_j \ \cdots \ \alpha\vec{a}_n)=\begin{pmatrix} \alpha\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \alpha\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \alpha\boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}=(\alpha\cdot a_{ij})$$

で定義します．次に例

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & e & f \\ \delta & \varepsilon & \varphi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ \alpha+\delta & \beta+\varepsilon & \gamma+\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mu\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu a & \mu b & \mu c \\ \mu\alpha & \mu\beta & \mu\gamma \end{pmatrix}$$

を見て理解を深めましょう．

　これまで $m\times n$ 行列 A, B に対して和・差とスカラー倍（定数倍）を定義しました．この 2 つの**優先順位**について注意します．すなわち $\lambda A \pm \mu B$ ですが,

$$\lambda A \pm \mu B=(\lambda A)\pm(\mu B)$$

とスカラー倍を計算した後に足し算・引き算をするのが唯一可能な計算順序です.

演習 2.2. 次の計算をしましょう.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ **(2)** $4\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

演習 2.3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ に対して $A+B$, $3A-B$, $A-2B$ を計算しましょう.

行列の足し算とスカラー倍に関して，次の定理 2.1 が成立します.

定理 2.1. m 行 n 列の行列 A，B，C に対して，以下が成立します.
(1) $A+B=B+A$
(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$
(3) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$
(4) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
(5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

Proof. 以下では $A=(\vec{a}_j)$, $B=(\vec{b}_j)$, $C=(\vec{c}_j)$ と行列 A，B，C の j 列を用いて定理を示します.
(1) $A+B=(\vec{a}_j+\vec{b}_j)=(\vec{b}_j+\vec{a}_j)=B+A$ から証明できます．ここで定理 1.1 の (1.6) を用いました.
(2) $(A+B)+C=(\vec{a}_j+\vec{b}_j)+(\vec{c}_j)=\Big((\vec{a}_j+\vec{b}_j)+\vec{c}_j\Big)=\Big(\vec{a}_j+(\vec{b}_j+\vec{c}_j)\Big)=A+(B+C)$ から証明できます．ここで定理 1.1 の (1.7) を用いました.
(3), **(4)**, **(5)**, については演習 2.4 とします. □

演習 2.4. 定理 *2.1* の **(3)**, **(4)**, **(5)** を証明しましょう.

2.3　行列の積

2.3.1　行列 × 列ベクトル

次に行列に右からベクトルを掛けることを考えます．上に与えた $m\times n$ 行列 $A=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n)$ と n 次元列ベクトル $\vec{x}\in\mathbf{R}^n$，すなわち

$$A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\end{pmatrix} \quad と \quad \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

との積を

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n \in \mathbf{R}^m$$

と定義します．この両辺の第 i 成分に着目すると

$$A\vec{x} = x_1 \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots + x_j \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots \\ x_1 a_{i1} + \cdots + x_j a_{ij} + \cdots + x_n a_{in} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j a_{ij} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

となります．ここで $\vec{p} = A\vec{x} = {}^t(p_1\ p_2\ \cdots\ p_m)$ と成分表示すると，$A\vec{x}$ の第 i 成分は

$$p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = (a_{i1} \cdots a_{ij} \cdots a_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}$$

となり，これから $A\vec{x}$ の成分表示

$$A\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\ \vec{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i\ \vec{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

を得ます．

演習 2.5. 次の行列の計算をしましょう．

(1) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　**(3)** $\begin{pmatrix} a & \alpha & p \\ b & \beta & q \\ c & \gamma & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$

演習 2.6. 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$ に対して次の積を計算しましょう.

(1) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(2)** $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(3)** $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(4)** $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ **(5)** $A\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$

上で見たように $m \times n$ 行列 A を n 次元ベクトル $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に左から掛けると m 次元ベクトル $A\vec{x} \in \mathbf{R}^m$ を得ます. ここで

$$\Phi_A(\vec{x}) = A\vec{x}$$

と定めると写像

$$\Phi_A : \ \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m \quad \vec{x} \mapsto A\vec{x} \tag{2.2}$$

を定義できます. この写像 Φ_A について次の定理 2.2 が成立し, これを Φ_A の**線型性**といいます.

定理 2.2.

$$\Phi_A(\vec{x} + \vec{y}) = \Phi_A(\vec{x}) + \Phi_A(\vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n) \tag{2.3}$$

$$\Phi_A(\lambda\vec{x}) = \lambda\Phi_A(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n,\ \lambda \in \mathbf{R}) \tag{2.4}$$

Proof. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ と $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の成分表示をします. すると

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\vec{x} + \vec{y}) &= (x_1 + y_1)\vec{a}_1 + \cdots + (x_j + y_j)\vec{a}_j + \cdots + (x_n + y_n)\vec{a}_n \\
&= x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n + y_1\vec{a}_1 + \cdots + y_j\vec{a}_j + \cdots + y_n\vec{a}_n \\
&= \Phi_A(\vec{x}) + \Phi_A(\vec{y}) \\
\Phi_A(\lambda\vec{x}) &= (\lambda x_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\lambda x_j)\vec{a}_j + \cdots + (\lambda x_n)\vec{a}_n \\
&= \lambda(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n) = \lambda\Phi_A(\vec{x})
\end{aligned}$$

から証明されます. □

(2.3) と (2.4) は行列の積の形では

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \quad A(\lambda\vec{x}) = \lambda\,(A\vec{x}) \tag{2.5}$$

と表されます. これをまとめて得られる

$$A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda A\vec{x}+\mu A\vec{y} \tag{2.6}$$

および (2.5) を繰り返して得られる

$$A(c_1\vec{x}_1+\cdots+c_\ell\vec{x}_\ell) = c_1A\vec{x}_1+\cdots+c_\ell A\vec{x}_\ell \tag{2.7}$$

も有用です．この公式 (2.7) は $X=(\vec{x}_1\ \cdots\ \vec{x}_\ell)$ と $\vec{c}={}^t(c_1\ \cdots\ c_\ell)$ を用いて

$$A(X\vec{c}) = (AX)\vec{c} \tag{2.8}$$

とも表現できます．これは，後に行列の積の結合法則の証明で用いることになります ((2.12) および定理 2.3（38 ページ）参照)．

演習 2.7. (2.6) と (2.7) を証明しましょう．

2.3.2　行ベクトル $\times$ 行列

行列の左から行ベクトルを掛けることも必要になります．$n\times\ell$ 行列 X が，行ベクトル表示と列ベクトル表示

$$X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = (\vec{x}_1\cdots\vec{x}_k\cdots\vec{x}_\ell) \tag{2.9}$$

を持っているとします．この X に左から n 次元行ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1\ \cdots a_j\ \cdots\ a_n)$ を掛けることを

$$\boldsymbol{a}X = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_j\boldsymbol{x}_j+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n$$

と ℓ 次元行ベクトルとして定義します（$\boldsymbol{x}_j$ が ℓ 次元行ベクトルであることに注意しましょう）．X の行ベクトルの各成分を用いて $\boldsymbol{a}X$ を計算してみると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}X = &a_1(x_{11}\cdots x_{1k}\cdots x_{1\ell})\\ &+\cdots\\ &+a_j(x_{j1}\cdots x_{jk}\cdots x_{j\ell})\\ &+\cdots\\ &+a_n(x_{n1}\cdots x_{nk}\cdots x_{n\ell})\end{aligned}$$

となります．このことから $\boldsymbol{a}X$ の第 k 成分は行ベクトル $\boldsymbol{a}$ と X の k 列 $\vec{x}_k$ の積

$$a_1x_{1k}+\cdots+a_jx_{jk}+\cdots+a_nx_{nk} = (a_1\ \cdots\ a_j\ \cdots\ a_n)\begin{pmatrix}x_{1k}\\ \vdots\\ x_{jk}\\ \vdots\\ x_{nk}\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\vec{x}_k$$

として表現できます．このことから

$$\boldsymbol{a}X = (\boldsymbol{a}\vec{x}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}\vec{x}_k\ \cdots\ \boldsymbol{a}\vec{x}_\ell)$$

と $\boldsymbol{a}X$ の成分が表現できます．

演習 2.8. 3 次元の標準単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = (1\ 0\ 0)$，$\boldsymbol{e}_2 = (0\ 1\ 0)$，$\boldsymbol{e}_3 = (0\ 0\ 1)$ と 3 行の行列 $X = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}\end{pmatrix}$ に対して $\boldsymbol{e}_1X$，$\boldsymbol{e}_2X$，$\boldsymbol{e}_3X$ を計算しましょう．また $(0\ \lambda\ 0)X$，$(1\ 0\ \lambda)X$ も計算しましょう．

2.3.3　行列 × 行列

■定義　さらに $m\times n$ 行列 A に対して $n\times\ell$ 行列 $X = (\vec{x}_1\cdots\vec{x}_\ell)$ を右から掛けるには，X の列ベクトルが $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k, \cdots, \vec{x}_\ell \in \mathbf{R}^n$ と ℓ 個の n 次元ベクトルである

ことに注意して,

$$AX = (A\vec{x}_1\ A\vec{x}_2\ \cdots A\vec{x}_\ell) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\ \vec{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1\ \vec{x}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_1\ \vec{x}_\ell \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}_\ell \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\ \vec{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\ \vec{x}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_m\ \vec{x}_\ell \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

と定義します．AX の列ベクトル $A\vec{x}_k$ が m 次元ベクトルであることから，AX は $m \times \ell$ 行列であることが分かります．また $X = (x_{jk})$，$P = AX = (p_{ik})$ と成分表示をすると P の (i,k) 成分は

$$p_{ik} = \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}_k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{jk}$$

となります.

演習 2.9. 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}$ に対して次の積を計算しましょう.

(1) $A\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **(2)** $A\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ **(3)** $A\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **(4)** $A\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

さらに行ベクトル表示 (2.1) を持つ $m \times n$ 行列 A と X の積 AX は

$$AX = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 X \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i X \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m X \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

とも表示されます．ここで

$$\boldsymbol{a}_i X = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_i\vec{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i\vec{x}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_i\vec{x}_n\end{pmatrix}$$

であることに注意すると，行ベクトル表示を用いた積 AX が (2.10) にある列ベクトル表示を用いた積と一致して，定義が整合的であることが分かります.

例 2.1. 3 行の行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ に演習 *2.9* の積に現れた行列を左から掛けましょう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

この計算は，後に行列の基本変形が基本行列を掛けることに他ならないことを示すのに用います.

演習 2.10. 3 行の行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ に対して次の積を計算しましょう.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$　**(2)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} A$　**(3)** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$

演習 2.11. 行ベクトル $\boldsymbol{x} = (p\ q\ r)$ に対して ${}^t\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x} \cdot {}^t\boldsymbol{x}$ を計算しましょう.

■線型写像の合成　A を $m \times n$ 行列，B を $n \times \ell$ 行列とします．(2.2) で説明しましたが，A と B はそれぞれ線型写像

$$\Phi_B : \ \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^n \quad \vec{c} \mapsto B\vec{c}$$

$$\Phi_A : \ \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m \quad \vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

を定めます．この写像 Φ_A と Φ_B の合成

$$\Phi_A \circ \Phi_B :\ \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^m \quad \vec{c} \mapsto \Phi_A(\Phi_B(\vec{c})) = A(B\vec{c})$$

について考えます（写像の合成についてはこのすぐ後にある囲み解説を参照）．演習 2.7 の (2.7) で示したことを用いて，$\Phi_A(\Phi_B(\vec{c})) = A(B\vec{c})$ を考えます．そのために $B = (\vec{b}_1\ \cdots\ \vec{b}_\ell)$，$\vec{c} = {}^t(c_1 \cdots c_\ell)$ と行列 B とベクトル $\vec{c}$ の成分を定めます．すると

$$\begin{aligned}\Phi_A(\Phi_B(\vec{c})) &= A(B\vec{c}) = A\left(c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_\ell\vec{b}_\ell\right) \\ &= c_1A\vec{b}_1 + \cdots + c_\ell A\vec{b}_\ell = \left(A\vec{b}_1\ \cdots\ A\vec{b}_\ell\right)\vec{c} = (AB)\vec{c} = \Phi_{AB}(\vec{c})\end{aligned}$$

から

$$\Phi_A \circ \Phi_B = \Phi_{AB}$$

を得ます．また行列の積の結合法則 に関する定理 2.3**(4)** の証明に用いる

$$A\,(B\vec{c}) = (AB)\,\vec{c} \tag{2.12}$$

も同時に示しました．

写像の合成 2 つの写像 $f:\ X \to Y$ と $g:\ Y \to Z$ があるとします．このとき

$$g \circ f :\ X \to Z \quad x \mapsto g(f(x))$$

が定義できます．これを f と g の合成写像と呼びます．
さらに写像 $h:\ Z \to W$ がある場合は

$$h \circ g \circ f :\ X \to W$$

が定義できますが，これは

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

と，合成をどの順序で行っても変わりません．

2.3.4　行列の積の性質

行列の積について以下の定理 2.3 が成立します．

定理 2.3. A と B は $m \times n$ 行列，X と Y は $n \times \ell$ 行列，Q は $\ell \times g$ 行列とします．このとき次が成立します．
(1) $(A+B)X = AX + BX$
(2) $A(X+Y) = AX + AY$
(3) $A(\alpha X) = (\alpha A)\,X = \alpha(AX)$
(4)（結合法則）$(AX)\,Q = A\,(XQ)$

この定理 2.3 の証明の準備として $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$，$B = \left(\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n\right)$ と $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(A+B)\,\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} \tag{2.13}$$

を示します．実際

$$\begin{aligned}(A+B)\vec{x} &= \left(\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n + \vec{b}_n\right)\vec{x} \\ &= x_1(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + \cdots + x_n(\vec{a}_n + \vec{b}_n) \\ &= x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n + x_1\vec{b}_1 + \cdots + x_n\vec{b}_n = A\vec{x} + B\vec{x}\end{aligned}$$

と示すことができます．また (2.5) で以下の最初の等号を示しましたが $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$A(\alpha\vec{x}) = \alpha\,(A\vec{x}) = (\alpha A)\vec{x} \tag{2.14}$$

が成立することも定理 2.3 の **(3)** の証明で使います．実際，2 番目の等号は $\vec{x} = {}^t(x_1 \ \cdots \ x_n)$ として

$$\begin{aligned}(\alpha A)\,\vec{x} &= \left(\alpha\vec{a}_1 \quad \cdots \quad \alpha\vec{a}_n\right)\vec{x} \\ &= x_1\alpha\vec{a}_1 + \cdots + x_n\alpha\vec{a}_n = \alpha(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n) = \alpha(A\vec{x})\end{aligned}$$

と示すことができます．

Proof. **（定理 2.3 の証明）(1)** 両辺の k 列を比較します．

$$(A+B)\vec{x}_k = A\vec{x}_k + B\vec{x}_k$$

から分かります（(2.13) 参照）．
(2) 両辺の k 列を比較します．

$$A\,(\vec{x}_k + \vec{y}_k) = A\vec{x}_k + A\vec{y}_k$$

から分かります（(2.5) 参照）．

(3) 各辺の k 列を比較しますが (2.14) は

$$A(\alpha\vec{x}_k) = (\alpha A)\vec{x}_k = \alpha(A\vec{x}_k)$$

を導きます.
(4) (2.12) を用いると $\vec{q} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$A\,(X\vec{q}) = (AX)\,\vec{q}$$

が成立します．Q の t 列を $\vec{q}_t$ とすると

$$A\,(X\vec{q}_t) = (AX)\,\vec{q}_t$$

ですが，これは示すべき式の t 列が等しいことを意味します．これを用いると

$$\begin{aligned} A(XQ) &= A(X\vec{q}_1\ \cdots\ X\vec{q}_g) = (A(X\vec{q}_1)\ \cdots\ A(X\vec{q}_g)) \\ &= ((AX)\vec{q}_1\ \cdots\ (AX)\vec{q}_g) = (AX)(\vec{q}_1\ \cdots\ \vec{q}_g) = (AX)Q \end{aligned}$$

と**行列の積の結合法則**が証明されます. □

この定理 2.3**(4)** にある行列の積の結合法則の意義ですが，これがあるから $m \times n$ 行列 A と $n \times \ell$ 行列 B，$\ell \times p$ 行列 C の 3 つの行列を掛けるとき

$$(AB)C = A(BC)$$

となるので，掛ける順序に結果がよらないことが分かります．これがあるので，この積を ABC と記述してもよいことが分かります.

2.3.5　行列の集合・正方行列

$m \times n$ 行列，すなわち m 行 n 列の行列全体がなす集合を

$$M_{m,n}(\mathbf{R}) := \{A;\ A\text{は}\ m \times n\ \text{行列}\}$$

と定めます．$A,\ B \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ とするとき，和と差，スカラー倍

$$A + B,\ A - B,\ \lambda A$$

が定義されることに注意しましょう．さらに $m = n$ のとき，$n \times n$ 行列のことを n 次**正方行列**とも呼びます．そして，その全体の集合を

$$M_n(\mathbf{R}) = M_{n,n}(\mathbf{R})$$

と定めます．$A,\ B \in M_n(\mathbf{R})$ とするとき，和，差，スカラー倍に加えて，積

$$AB$$

が定義されることに注意しましょう．また $A \in M_n(\mathbf{R})$ とするとき

$$A^\ell = A^{\ell-1}A$$

と帰納的に A の**べき乗**も定義されます（$A^1 = A$ とします）．

演習 2.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して A^n を求めましょう．

2.3.6　行列の積の非可換性

$a,\ b \in \mathbf{R}$ に対しては、**交換法則**

$$ab = ba$$

が成立しました．しかし，行列の積について一般的には積の交換法則が成立しません．例えば $A,\ B \in M_3(\mathbf{R})$ とすると $AB,\ BA \in M_3(\mathbf{R})$ が成立しますが，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．このように積の順序を交換すると結果が違ってきます．演習 2.13 で行列の積が可換な場合について考えます．

2.4　正則行列

2.4.1　単位行列・ゼロ行列

単位行列とは n 次正方行列，すなわち $n \times n$ 行列

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

です．$I_n = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \cdots \vec{e}_n)$ と列ベクトル表示をするとき，$\vec{e}_j$ は第 j 成分が 1，他の成分が 0 であるベクトルとなります．この $\vec{e}_j$ を**標準単位ベクトル**と呼びます．これは 3 ページで定義しました．また I_n の行ベクトル表示は $\boldsymbol{e}_i = {}^t\vec{e}_i$ と定めると

$$I_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{e}_1 \\ {}^t\vec{e}_2 \\ \vdots \\ {}^t\vec{e}_n \end{pmatrix}$$

となることにも注意しましょう．さらに $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n)$ に $\vec{e}_j$ を右から掛けると

$$A\vec{e}_j = 0\vec{a}_1 + \cdots + 0\vec{a}_{j-1} + 1\vec{a}_j + 0\vec{a}_{j+1} + \cdots + 0\vec{a}_n = \vec{a}_j$$

と計算されます（演習 2.6 参照）．同様に，33 ページの行ベクトル表示 (2.9) を持つ $n \times \ell$ 行列 X に対して $\boldsymbol{e}_i$ を左から掛けると

$$\boldsymbol{e}_i X = 0 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_{i-1} + 1 \cdot \boldsymbol{x}_i + 0 \cdot \boldsymbol{x}_{i+1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_i \tag{2.15}$$

が成立します（演習 2.8 参照）．

単位行列は行列の掛け算では数の 1 に相当する働きをします．A を今まで考えた $m \times n$ 行列とします．このとき

$$AI_n = (A\vec{e}_1\ A\vec{e}_2\ \cdots\ A\vec{e}_n) = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n) = A$$

となります．他方，上の $n \times \ell$ 行列 X に I_n を左から掛けると

$$I_n X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 X \\ \boldsymbol{e}_2 X \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = X$$

が成立します．以上で次の定理 2.4 を証明しました．

定理 2.4. A を $m \times n$ 行列，X を $n \times \ell$ 行列とすると

$$AI_n = A, \quad I_n X = X$$

が成立します．

演習 2.13. $A \in M_n(\mathbf{R})$ が任意の $X \in M_n(\mathbf{R})$ に対して

$$AX = XA$$

が成立するとします．このとき，ある $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して $A = \alpha I_n$ となることを証明しましょう．

上で単位行列 I_n が数の 1 に相当することを説明しました．次に定義する**ゼロ行列**が数の 0 に相当します．$m \times n$ のゼロ行列とは，すべての成分が 0 である

$$O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

のことです．$m = n$ のとき $O_n = O_{n,n}$ とも記します．$O_{m,n} = (\vec{0} \cdots \vec{0})$ と列ベクトルで表示すると $m \times n$ 行列 $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$ に対して

$$\boxed{O_{m,n} + A = A + O_{m,n} = A}$$

が成立することが

$$\vec{0} + \vec{a}_j = \vec{a}_j + \vec{0} = \vec{a}_j$$

によって示せます．

次に，ゼロ行列の積について考えましょう．

$$\mathbf{0} = (0 \cdots 0) \in (\mathbf{R}^m)^*, \ \vec{0} = {}^t(0 \cdots 0) \in \mathbf{R}^n$$

を m 次の行ゼロベクトル，n 次の列ゼロベクトルとすると $m \times n$ 行列 A に対して

$$\mathbf{0}A = 0\boldsymbol{a}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}, \quad A\vec{0} = 0\vec{a}_1 + \cdots + 0\vec{a}_n = \vec{0}$$

が成立します．このことから

$$\boxed{O_{p,m}A = O_{p,n} \quad AO_{n,\ell} = O_{m,\ell}}$$

が従います．

2.4.2　正則行列・逆行列

■正則行列の定義　n 次正方行列 A が**正則行列**であるとは，n 次正方行列 X が存在して

$$AX = XA = I_n \tag{2.16}$$

が成立するときです．この X は存在すれば一意的に定まります．実際，

$$AX = XA = I_n \quad \text{および} \quad AY = YA = I_n$$

が成立するとき

$$Y(AX) = YI_n = Y, \quad Y(AX) = (YA)X = I_nX = X$$

から $X = Y$ が従うからです．そこで，(2.16) を満たす X が存在するとき，$A^{-1} = X$ と定めて**正則行列** A の**逆行列**と呼びます．

ここで正則な行列の例をいくつか示しましょう．35 ページの例 2.1 にある計算から

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

が成立することが分かります. このことから $S_{13} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は正則で $S_{13}^{-1} = S_{13}$ が成立します．また

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

から $R_{13}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則で $R_{13}(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_{13}(-\lambda)$ であることが分かります.

演習 2.14. $\alpha\beta\gamma \neq 0$ のとき対角行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ が正則であることを示して，逆行列を求めましょう．（一般に $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ に対して，$i \neq j$ のとき $a_{ij} = 0$ ならば A を対角行列と呼びます.）

演習 2.15. $\alpha\beta \neq 0$ とします．$A = \begin{pmatrix} \alpha & p \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が正則であることを

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & q \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

に対して AB と BA を計算することによって示しましょう．

■正則行列の性質　次に正則行列の性質を述べましょう．

> **定理 2.5.** C と D が n 次正方行列で正則とします．このとき C と D の積 CD と C の逆行列 C^{-1} も正則となります．

実際

$$(CD)(D^{-1}C^{-1}) = C(DD^{-1})C^{-1} = CI_nC^{-1} = CC^{-1} = I_n$$

$$(D^{-1}C^{-1})(CD) = D^{-1}(C^{-1}C)D = D^{-1}I_nD = D^{-1}D = I_n$$

から

$$(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$$

が CD の逆行列となります．また

$$C^{-1}C = CC^{-1} = I_n$$

から C^{-1} も正則で

$$\left((C)^{-1}\right)^{-1} = C$$

となります．

演習 2.16. A, B, C が n 次の正則行列であるとします．このとき ABC が正則であることを示し，逆行列 $(ABC)^{-1}$ を求めましょう．

正則でない行列の例について説明しましょう．まず O_n は正則行列ではありません．実際，どのような n 次正方行列 $X \in M_n(\mathbf{R})$ を考えても

$$XO_n = O_nX = O_n$$

が成立しますから，O_n の逆行列は存在しません．数 0 に逆数が存在しないことと同じことです．

さらなる例を説明するために正則行列に関する次の定理 2.6 を示します．

定理 2.6. **(1)** A を n 次正則行列とします．このとき $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

が成立します.
(2) n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ を考えます．ある $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$A\vec{v} = \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0}$$

が成立するならば A は正則ではありません.

Proof. **(1)** A が正則で $A\vec{v} = \vec{0}$ とします．このときこの両辺に左から A の逆行列 A^{-1} を掛けると

$$A^{-1}(A\vec{v}) = (A^{-1}A)\vec{v} = I_n\vec{v} = \vec{v},\ A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

から $\vec{v} = \vec{0}$ が従います.
(2) これは **(1)** の対偶に他なりません. □

この定理 2.6 の **(2)** を用いると，正則でない行列の例を作ることができます．例えば 3 次正方行列 $A = (\vec{0}\ \vec{b}\ \vec{c}) \in M_3(\mathbf{R})$ は正則ではありません．実際

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0},\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が成立するからです.

次に 3 次正方行列 $A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ において $\vec{a}||\vec{b}$ とします．このとき $(c_1\ c_2) \neq \mathbf{0}$ が存在して

$$c_1\vec{a} + c_2\vec{b} = \vec{0}$$

が成立し

$$A\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\0\end{pmatrix} = c_1 \cdot \vec{a} + c_2 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0},\ \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\0\end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が従いますから A は正則ではありません．特に 3 次正方行列 $(\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{c})$，例えば

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\-1 & -1 & 2\\2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

は正則ではありません.

■2 **次の正則行列**　2 次の正方行列がいつ正則であるかについて，詳しく調べてみましょう．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \text{ に対して } \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

を A の**余因子行列**と呼びます．このとき

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

が成立します．このことから $ad-bc \neq 0$ のとき $X = \dfrac{1}{ad-bc}\tilde{A}$ と定めると

$$AX = XA = I_2$$

が成立します．したがって，A は正則で，$A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ となります．

次に $ad-bc=0$ の場合を考えます．15 ページの補助定理 1.4**(2)** を用いると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在します．これから A は正則でないことが分かります．

以上で次の定理 2.7 を証明しました．

定理 2.7. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A\text{は正則} \Leftrightarrow ad-bc \neq 0$$

が成立します．

この定理 2.7 において $\det(A) = ad-bc$ と定めて，A の**行列式**と呼びます．また $|A| = \det(A)$ とも記すことがあります．定理 2.7 の内容は定理 4.3（83 ページ）と同一ですが，ここで与えた証明の後半は後に 83 ページで与えるものと異なります．

正則行列を特徴付けて，その逆行列を求めることは，本書の一貫したテーマの 1 つです．一般の次数の場合は，定理 3.8（75 ページ）と定理 4.16（127 ページ）において正則行列の特徴付けを行います．また逆行列の計算には 2 つの方法があって，3.3.2 節において掃き出し法を用いた方法，4.3.6 節において行列式を用いるクラメールの公式について解説します．

2.5　行列の転置

2.5.1　転置行列

1.1.4 節において列ベクトルと行ベクトルの転置について学びました．この節では行列の転置について説明します.

$m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

を考えます．行列 A の**転置行列**とは,

$$^tA := \begin{pmatrix} ^t\vec{a}_1 \\ ^t\vec{a}_2 \\ \vdots \\ ^t\vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^t\boldsymbol{a}_1 & ^t\boldsymbol{a}_2 & \cdots & ^t\boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$$

によって定義される $n \times m$ 行列です．^tA の j 行 i 列の成分は A の i 行 j 列 a_{ij} となることにも注意しましょう．例えば

$$^t\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}, \quad ^t\begin{pmatrix} p & \alpha \\ q & \beta \\ r & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q & r \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

となります.

行列の転置の性質について次の定理 2.8 が基本です.

定理 2.8. **(1)** A を $m \times n$ 行列とするとき

$$^t\left(^tA\right) = A \tag{2.18}$$

と転置を 2 度施すと元に戻ります.

(2) B を上で考えた $n \times \ell$ 行列とします．このとき積 AB が定義されますが

$$^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA \tag{2.19}$$

が成立します.

Proof. **(1)** これは列ベクトル $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$ に対して

$$^t\left(^t\vec{a}\right) = \vec{a}$$

から分かります（定理 1.3 の **(1)** 参照).
(2) $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_\ell \end{pmatrix}$ と A, B を列ベクトル表示します.
演習 1.12 の (1.17) を用いると $\vec{b} = {}^t(b_1 \ \cdots \ b_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$^t\left(b_1\vec{a}_1 + \cdots + b_n\vec{a}_n\right) = b_1{}^t\vec{a}_1 + \cdots + b_n{}^t\vec{a}_n$$

となりますが，これは

$$^t\left(A\vec{b}\right) = {}^t\vec{b} \cdot {}^tA$$

を意味します．このことを用いると

$$^t(AB) = {}^t\begin{pmatrix} A\vec{b}_1 & \cdots & A\vec{b}_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^t(A\vec{b}_1) \\ \vdots \\ ^t(A\vec{b}_\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^t\vec{b}_1 \cdot {}^tA \\ \vdots \\ ^t\vec{b}_\ell \cdot {}^tA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^t\vec{b}_1 \\ \vdots \\ ^t\vec{b}_\ell \end{pmatrix} {}^tA = {}^tB \cdot {}^tA$$

から証明されました. □

演習 2.17. **(1)** $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) \in M_{m,3}(\mathbf{R})$ にとします．${}^tAA$ を計算しましょう.
(2) ${}^tAA = O_3$ ならば $A = O_{m,3}$ が成立することを示しましょう.

演習 2.18. n 次正方行列 $S \in M_n(\mathbf{R})$ が**対称**であるとは ${}^tS = S$ が成立するときです.
(1) $A \in M_{m.n}(\mathbf{R})$ に対して ${}^tAA$ が対称行列であることを示しましょう.
(2) $S \in M_n(\mathbf{R})$ が対称であるとします．このとき $n \times \ell$ 行列 $C \in M_{n,\ell}(\mathbf{R})$ に対して ${}^tCSC$ が対称であることを示しましょう.

n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ が正則であるとします．このとき（逆行列）$X \in M_n(\mathbf{R})$ が存在して

$$AX = XA = I_n$$

が成立します．${}^tI_n = I_n$ であることを用いると，この等式の各辺の転置から

$$^tX{}^tA = {}^tA{}^tX = I_n$$

が従います．これから ${}^tA$ は正則となって

$$\left(^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right) \tag{2.20}$$

が成立することが分かります.

2.5.2　なぜ転置行列が必要か

なぜ転置行列が必要になるか説明しましょう．実数値の $m\times n$ 行列の A には右から n 次元列ベクトル $\vec{v}\in\mathbf{R}^n$ を掛けることができ，$A\vec{v}\in\mathbf{R}^m$ となります．他方，$n\times m$ 行列の ${}^tA$ には右から m 次元列ベクトル $\vec{w}\in\mathbf{R}^m$ を掛けることができ，${}^tA\vec{w}\in\mathbf{R}^n$ となります．このとき

$$\boxed{(A\vec{v},\vec{w})=(\vec{v},{}^tA\vec{w}) \qquad (2.21)}$$

が成立します．等式の左辺は $\mathbf{R}^m$ の内積，右辺は $\mathbf{R}^n$ の内積です．この (2.21) は，1.2 節の (1.18) で与えた内積の表示[*1] を用いて

$$(A\vec{v},\vec{w})={}^t(A\vec{v})\vec{w}=({}^t\vec{v}\cdot{}^tA)\vec{w}={}^t\vec{v}\cdot({}^tA\vec{w})=(\vec{v},{}^tA\vec{w})$$

と証明します．

演習 2.19. $m\times n$ 行列 $A\in M_{m,n}(\mathbf{R})$ と $\vec{x}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$||A\vec{x}||^2=({}^tAA\vec{x},\vec{x}) \tag{2.22}$$

を示しましょう．

演習 2.17 と演習 2.18 において現れましたが，A を $m\times n$ 行列とするとき ${}^tAA$ のことを A が定める **Gram 行列**と呼びます．その成分は $A=(\vec{a}_1\cdots\vec{a}_n)$ と A の列ベクトル表示を用いて

$${}^tAA=\begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1\vec{a}_1 & \cdots & {}^t\vec{a}_1\vec{a}_k & \cdots & {}^t\vec{a}_1\vec{a}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^t\vec{a}_i\vec{a}_1 & \cdots & {}^t\vec{a}_i\vec{a}_k & \cdots & {}^t\vec{a}_i\vec{a}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^t\vec{a}_n\vec{a}_1 & \cdots & {}^t\vec{a}_n\vec{a}_k & \cdots & {}^t\vec{a}_n\vec{a}_n \end{pmatrix}=((\vec{a}_i,\vec{a}_k))_{1\leqq i,k\leqq n}$$

と i 行 k 列の成分が内積 $(\vec{a}_i,\vec{a}_k)$ で表示されます．

[*1] $\vec{a}$, $\vec{b}\in\mathbf{R}^n$ に対して $(\vec{a},\vec{b})={}^t\vec{a}\ \cdot\vec{b}$ が成立することです．

2.6　ブロック行列と三角行列

$m_1 \times n_1$ 行列 A_1, $m_1 \times n_2$ 行列 A_2, $m_2 \times n_1$ 行列 B_1, $m_2 \times n_2$ 行列 B_2 を重ねた $(m_1+m_2) \times (n_1+n_2)$ 行列

$$C = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \end{array}\right)$$

を考えることがあります。このような行列を**ブロック行列**と呼びます．ここで用いた縦線と横線は区切りをはっきりさせるためですが, 書かない場合もあります. $\vec{x} \in \mathbf{R}^{n_1}$ と $\vec{y} \in \mathbf{R}^{n_2}$ を縦に重ねた $\vec{z} = \left(\begin{array}{c} \vec{x} \\ \hline \vec{y} \end{array}\right) \in \mathbf{R}^{n_1+n_2}$ を C に掛けると

$$C\vec{z} = \left(\begin{array}{c} A_1\vec{x} + A_2\vec{y} \\ \hline B_1\vec{x} + B_2\vec{y} \end{array}\right)$$

となることに注意しましょう。さらに $n_1 \times \ell_1$ 行列 P_1, $n_2 \times \ell_1$ 行列 P_2, $n_1 \times \ell_2$ 行列 Q_1, $n_2 \times \ell_2$ 行列 Q_2 を重ね合わせた $(n_1+n_2) \times (\ell_1+\ell_2)$ 行列を右から C に掛けると

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P_1 & Q_1 \\ \hline P_2 & Q_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1P_1 + A_2P_2 & A_1Q_1 + A_2Q_2 \\ \hline B_1P_1 + B_2P_2 & B_1Q_1 + B_2Q_2 \end{array}\right)$$

とブロックごとに計算ができます.

応用上よく使うのが $m_1 = n_1 = \ell_1 = 1$ の場合です。すなわち $m \times n$ 行列 A, $n \times \ell$ 行列 B, $\vec{y} \in \mathbf{R}^m$, $\vec{q} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in (\mathbf{R}^m)^*$, $\boldsymbol{p} \in (\mathbf{R}^n)^*$ に対して

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha & \boldsymbol{x} \\ \hline \vec{y} & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \beta & \boldsymbol{p} \\ \hline \vec{q} & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\beta + \boldsymbol{x}\vec{q} & \alpha\boldsymbol{p} + \boldsymbol{x}B \\ \hline \beta\vec{y} + A\vec{q} & \vec{y}\boldsymbol{p} + AB \end{array}\right)$$

が成立します．さらに $\vec{y} = \vec{0}$ かつ $\vec{q} = \vec{0}$ のとき

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha & \boldsymbol{x} \\ \hline \vec{0} & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \beta & \boldsymbol{p} \\ \hline \vec{0} & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\beta & \alpha\boldsymbol{p} + \boldsymbol{x}B \\ \hline \vec{0} & AB \end{array}\right) \tag{2.23}$$

が成立します.

一般に $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して a_{ii} のことを**対角成分**と呼びます．また n 次正方行列 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ が

$$a_{ij} = 0 \quad (j < i)$$

を満たすとき，A を**上三角行列**と呼びます．他方

$$a_{ij} = 0 \quad (j > i)$$

を満たすとき A を**下三角行列**と呼びます.

公式 (2.23) を繰り返して用いると**上三角行列**の積が三角行列で

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \beta_2 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \alpha_2\beta_2 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1}\beta_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$$

と積の対角成分が対角成分の積となることが分かります．このことは下三角行列の間の積でも同様です.

第 3 章

連立 1 次方程式と行列の基本変形

3.1　連立 1 次方程式の表現法

3.1.1　拡大行列

$m\times n$ 行列 $A=(a_{ij})_{1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq m}$ と m 次元ベクトル $\vec{b}={}^t(b_1\ b_2\ \cdots\ b_m)\in\mathbf{R}^m$ が与えられたときに，n 個の未知数 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ を $\vec{x}={}^t(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$ とベクトルとして，連立 1 次方程式

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

を考えます．すなわち，行列 A とベクトル $\vec{b}$ の成分を用いて表わすと，方程式

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

を考えます．行列 A の列ベクトル表示が $A=(\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n)$ であるとき，この方程式を**拡大行列** $(A|\vec{b})$ すなわち $m\times(n+1)$ 行列

$$(A|\vec{b})=(\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n|\vec{b})$$

で表現して考えます．縦線 '|' は行列 A とベクトル $\vec{b}$ の境目を強調するために用います．例えば

$$\left\{\begin{array}{rl} x_2+3x_3+2x_4 = & 4\cdots(1) \\ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\quad = & -3\cdots(2) \\ 2x_1+4x_2+4x_3+3x_4 = & 0\cdots(3) \\ -x_1-\ x_2+\ x_3 \qquad\quad = & 3\cdots(4) \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

と対応します．この章ではあまり用いませんが，この連立方程式は

$$x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

という幾何的な表現を持ちます．

例としてこの連立 1 次方程式を解いてみましょう．まず，(1) 式と (2) 式を交換します．この変形は右側の拡大行列では，1 行と 2 行の交換に相当します．

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +\,2x_2 & +\,2x_3 & & = -3 \cdots (1)_1 \\ & x_2 & +\,3x_3 & +\,2x_4 & = 4 \cdots (2)_1 \\ 2x_1 & +\,4x_2 & +\,4x_3 & +\,3x_4 & = 0 \cdots (3)_1 \\ -x_1 & -\,x_2 & +\,x_3 & & = 3 \cdots (4)_1 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

次に $(1)_1$ 式の (-2) 倍を $(3)_1$ 式に加え，$(1)_1$ 式を $(4)_1$ 式に加えて行きます．このことは拡大行列の 1 行の (-2) 倍を 3 行に加え，1 行を 4 行に加えることに対応します．

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +\,2x_2 & +\,2x_3 & & = -3 \cdots (1)_2 \\ & x_2 & +\,3x_3 & +\,2x_4 & = 4 \cdots (2)_2 \\ & & & 3x_4 & = 6 \cdots (3)_2 \\ & x_2 & +\,3x_3 & + & = 0 \cdots (4)_2 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

さらに $(2)_2$ 式の (-2) 倍を $(4)_2$ 式に加え，(-1) 倍を $(4)_2$ 式に加えます．これは拡大行列の 2 行の (-2) 倍を 1 行に加え，(-1) 倍を 4 行に加えることに対応します．

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & & -\,4x_3 & -\,4x_4 & = -3 \cdots (1)_3 \\ & x_2 & +\,3x_3 & +\,2x_4 & = 4 \cdots (2)_3 \\ & & & 3x_4 & = 6 \cdots (3)_3 \\ & & & -2x_4 & = -4 \cdots (4)_3 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

と同値変形されていきます．今からは，拡大行列だけに着目して考えていきます．まず 3 行に $\dfrac{1}{3}$ を掛けます．これは $(3)_3$ 式を $\dfrac{1}{3}$ 倍することに対応します．

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{(*)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(**)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{(***)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と計算されます．ここで $(*)$ は 3 行の 4 倍を 1 行に加えて，$(**)$ は 3 行の (-2) 倍を 2 行に加えています．そして，最後に $(***)$ において 3 行の 2 倍を 4 行に加えてい

ます．最後に得た連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 4x_3 \qquad = -3 \cdots (1)_7 \\ \qquad x_2 + 3x_3 \qquad = \ \ 0 \cdots (2)_7 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = \ \ 2 \cdots (3)_7 \end{cases}$$

に対応します．ここで $(4)_7$ 式が

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$$

とすべての $\vec{x} = {}^t(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ が満たす条件であることから，これを除いて考えます．さらに，$x_3 = \beta$ と置くと

$$x_1 = 4\beta - 3,\ x_2 = -3\beta,\ x_3 = \beta,\ x_4 = 2$$

すなわち

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4\beta - 3 \\ -3\beta \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と解がパラメータ β で表示されます．この β は任意です．以上で用いた変形を，方程式に対する変形と対応する拡大行列への変形を対照させてまとめると，次の表になります．

(i)	(i) 式と (j) 式を交換	i 行と j 行を交換 $(i \neq j)$
(ii)	(i) 式を λ 倍	i 行を λ 倍 $(\lambda \neq 0)$
(iii)	(i) 式の λ 倍を (j) 式に加える	i 行の λ 倍を j 行に加える $(i \neq j)$

連立 1 次方程式の解法についてさらに詳しく解説しますが，まず次の 3.1.2 節でこれらの 3 種類の変形の詳細について解説します．

3.1.2　階段行列・行基本変形・基本行列

■行基本変形・基本行列　3.1.1 節では，連立 1 次方程式に対して，対応する拡大行列を 3 種類の操作による同値変形を用いて解くことに触れました．この節では，連立 1 次方程式の拡大行列と関係なく，この操作について説明していきます．

$m \times n$ 行列 A に対して，

(i)	i 行と j 行を交換する $(i \neq j)$	$ir \leftrightarrow jr$
(ii)	i 行を λ 倍する $(\lambda \neq 0)$	$ir\times = \lambda$
(iii)	i 行の λ 倍を j 行に加える $(i \neq j)$	$jr+ = ir \times \lambda$

の行基本変形と呼ぶ 3 種類の操作を考えます．この表の右側には，行基本変形を略記する記法を与えてありますが，r は行を表す row から取っています．

この **3 種類の変形は可逆**です．実際，**(i)** i 行と j 行の交換を 2 度繰り返すと元に戻ります．**(ii)** i 行を λ 倍して，さらに $\dfrac{1}{\lambda}$ 倍すると元に戻ります．**(iii)** i 行の λ 倍を j 行に加えて，さらに $(-\lambda)$ 倍を加えると元に戻ります．具体的に 4 行の行列を用いた次の例からこのことを理解しましょう．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r\leftrightarrow 3r} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r\leftrightarrow 3r} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{4r\times=\lambda} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \lambda\boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{4r\times=\frac{1}{\lambda}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3r+=\lambda\times 1r} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3+\lambda\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3r+=(-\lambda)\times 1r} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3+\lambda\boldsymbol{a}_1-\lambda\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}$$

例 2.1（35 ページ）で計算した例を思い出しましょう．行基本変形は A に次の**基本行列**と呼ばれる m 次正方行列を左から掛けることに対応しています．すなわち，上の 3 種類の操作に対して，それぞれ行列

(i)

$$P_m(i,j) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & (i) & & & & (j) & & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ (j) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

(ii)

$$Q_m(i,\lambda)=\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc}&&&(i)&&&\end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1&&&&&&\\
&\ddots&&&&&\\
&&1&&&&\\
&&&\lambda&&&\\
&&&&1&&\\
&&&&&\ddots&\\
&&&&&&1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\\ \\ \\ (i)\\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

(iii)

$$R_m(i,j,\lambda)=\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccc}&&&(i)&&&&(j)&&&\end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1&&&&&&&&&&\\
&\ddots&&&&&&&&&\\
&&1&&&&&&&&\\
&&&1&&&&0&&&\\
&&&&1&&&&&&\\
&&&&&\ddots&&&&&\\
&&&&&&1&&&&\\
&&&\lambda&&&&1&&&\\
&&&&&&&&1&&\\
&&&&&&&&&\ddots&\\
&&&&&&&&&&1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\\ \\ \\ (i)\\ \\ \\ \\ (j)\\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

を左から A に掛けることが対応します．この事実を 3 行の行列 $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{a}_3\end{pmatrix}$ の基本変形をもとに考えましょう．

$$P_3(1,3)A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_3A\\ \boldsymbol{e}_2A\\ \boldsymbol{e}_1A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_3\\ \boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{a}_1\end{pmatrix}$$

と $P_3(1,3)$ を左から掛けると 1 行と 3 行が交換されます．次に

$$Q_3(2,\lambda)A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \lambda\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3 3\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1A\\ \lambda\boldsymbol{e}_2A\\ \boldsymbol{e}_3A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \lambda\boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{a}_3\end{pmatrix}$$

と $Q_3(2,\lambda)$ を A に掛けると 2 行が λ 倍されます．最後に

$$R_3(1,3,\lambda)A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \lambda\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 A \\ \boldsymbol{e}_2 A \\ (\lambda\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3)A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \lambda\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$$

と $R_3(1,3,\lambda)$ を左から掛けると 1 行の λ 倍を 3 行に加えることができます．

上で 3 種類の行基本変形が可逆であることを説明しました．このことと裏表の関係にありますが，3 種類の**基本行列は正則**です．実際，

$$\begin{aligned} &P_m(i,j)P_m(i,j) = I_m,\ Q_m(i,\lambda)Q_m(i,\frac{1}{\lambda}) = Q_m(i,\frac{1}{\lambda})Q_m(i,\lambda) = I_m \\ &R_m(i,j,\lambda)R_m(i,j,-\lambda) = R_m(i,j,-\lambda)R_m(i,j,\lambda) = I_m \end{aligned}$$

が成立しますから，基本行列の逆行列が基本行列となります．これらの等式を示すには，左の基本行列が右側の行列の行にどのように作用するかを考えれば分かります．2.4.2 節（43 ページ）で正則な行列の例として，基本行列が挙げられていることを見直しましょう．

演習 3.1. 次の等式を示しましょう．
(1) $P_4(1,3)P_4(1,3) = I_4$
(2) $Q_4(2,\lambda)Q_4(2,\frac{1}{\lambda}) = Q_4(2,\frac{1}{\lambda})Q_4(2,\lambda) = I_4$
(3) $R_4(2,4,-\lambda)R_4(2,4,\lambda) = R_4(2,4,\lambda)R_4(2,4,-\lambda) = I_4$

3.1.1 節で例を示しましたが，すべての $m \times n$ 行列 A に対して，有限回の行基本変形を繰り返せば

$$\begin{pmatrix} & \bigstar & * & * & & * \\ & & & \bigstar & * & * \\ & & & & \ddots & * \\ & & & & & \bigstar \quad * \end{pmatrix}$$

という**階段行列**に変形できます．ここで，★ の位置の値は 0 でなく，**ピボット** (*pivot*) と呼びます（最初の何列かが $\vec{0}$ でも構いません）．このピボットの個数を行列 A の**階数** (*rank*) と呼び，$\mathrm{rank}(A)$ と記します．A を階段行列にする行基本変形の順序は無数にありますが，A の階数は A によって一定です．この事実は，72 ページの定理 3.5 で与えます．

行基本変形によって，さらに (a) すべてのピボットが 1 に等しく，(b) ピボットの上がすべて 0 という形の行列（**狭義の階段行列**）

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & & 0 & * \\ & & 1 & * & & 0 & * \\ & & & & \ddots & \vdots & * \\ & & & & & 1 & * \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

に変形できます．本書では証明を省略しますが，A に対してこの形の階段行列が一意的に定まります．すなわち

$$A \to \cdots \to A_1, \quad A \to \cdots \to A_2 \tag{3.2}$$

と A が狭義の拡大行列 A_1 と A_2 に行基本変形されると，$A_1 = A_2$ が従います（注意 5.1 に少し説明してあります）．

このことを認めると，行列 A に対して階数が一意的に定まることも理解できるはずです．ここでは行列 A が行基本変形を繰り返して狭義の階段行列に変形されることを，最初は例によって理解しましょう．

例 3.1. 4×4 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を行基本変形を用いて狭義の階段行列に変形しましょう．

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで用いた行基本変形のそれぞれについて説明しましょう．

(1) $1r \leftrightarrow 2r$　まず A の 1 列 $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ において，上からゼロでない成分を探します．

すると 2 行の太字にしてある $\mathbf{1}$ が見付かります．これをピボットにするために，1 行と 2 行の交換をします．

(2) $3r+=1r\times(-2)$, $4r+=1r$　1 行 $\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ の 1 列の $\mathbf{1}$ を用いて，その下の成分を 0 にします．

(3) $1r+=2r\times(-2)$, $4r+=2r\times(-1)$　1 行を除く行列 $A_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$ に着目します．A_2 において最初の $\vec{0}$ でない 2 列を見付けます．2 列 $\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ の上からゼロでない成分を探しますが，1 行の $\mathbf{1}$ が見付かります．そこで，1 行の $\begin{pmatrix}0 & \mathbf{1} & 3 & 2\end{pmatrix}$ の $\mathbf{1}$ を用いて，行列全体においてその上と下の成分を 0 にします．

(4) $3r\times=\frac{1}{3}$　さらに 2 行を除いた行列 $A_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ に着目します．最初の $\vec{0}$ でない 4 列を見付けます．4 列 $\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\ -2\end{pmatrix}$ からゼロでない成分を探します．すると $\mathbf{3}$ が該当します．これを 1 にするために，この行（全体の 3 行）を $\frac{1}{3}$ 倍します．

(5) $1r+=3r\times 4$, $2r+=3r\times(-2)$, $4r+=3r\times 2$　$A_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \mathbf{1}\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ の $\mathbf{1}$ を用いて，行列全体でその上と下を 0 にします．

例 3.1 で示した変形は，あるアルゴリズムに則って計算しています．そのフローを示すと以下のようになります．

Step 0　$k=1$, $A_1=A$ とする．

Step 1　**（条件分岐）** $A_k=0$ かどうかで条件分岐します．

- $A_k=0$ ならば A は狭義の階段行列 **（停止）**．
- $A_k\neq 0$ ならば Step 2 に行きます．

Step 2　A_k の $\vec{0}$ でない最初の列 $\vec{p}$ を見付けます．

Step 3　$\vec{p}$ の最初の 0 でない成分 q を見付けます．

Step 4　q を含む A_k の行と A_k の 1 行（A の k 行）を交換します．

Step 5　A_k の第 1 行（A の k 行）$\boldsymbol{a}_k$ の最初の 0 でない成分が $\mathbf{1}$ になるように，$\boldsymbol{a}_k$ をスカラー倍します（$\mathbf{1}$ を pivot にします）．

Step 6　Step 5 で作った $\boldsymbol{a}_k$ の $\mathbf{1}$ を用いて，その上と下を 0 にします．

Step 7（**条件分岐**）　$k = m$ かどうかによって条件分岐をします．

- $k = m$ ならば A は狭義の階段行列に変形されています（**停止**）．
- $k \neq m$ ならば次の Step 8 に行きます．

Step 8　A_{k+1} を A の $k+1$ 行から n 行までの行列とします．k の値を 1 増やして，Step 1 に戻ります．

演習 3.2. 次の行列を行基本変形を用いて狭義の階段行列にしましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -14 & 10 \\ 2 & 3 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

3.2 連立 1 次方程式の解法

この 3.2 節では，3.1.2 節で導入した行基本変形を用いた連立 1 次方程式の解法について解説します．ただし，この節での解説はあくまでも，具体例によります．

3.2.1 斉次方程式

まず連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{3.3}$$

を考えましょう．連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ において，$\vec{b}$ のことを**非斉次項**といいますが，このように $\vec{b} = \vec{0}$ の場合，方程式は**斉次** (*homogeneous*) であるといいます．斉次方程式に関して著しいのは $\vec{x} = \vec{0}$ が解であることです．解 $\vec{x} = \vec{0}$ のことを**自明解** (*trivail solution*) と呼びます．また，$\vec{x} \neq \vec{0}$ である解を**非自明解** (*non-trivail solution*) と呼びますが，一般に斉次方程式に非自明解が存在するとは限りません．

この方程式の拡大行列を行基本変形すると

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{3.4}$$

と狭義の階段行列となります．変形後の拡大行列は

$$\begin{cases} x_1 & & & -x_4 & = 0 \\ & x_2 & & +x_4 & = 0 \\ & & x_3 & +x_4 & = 0 \end{cases}$$

を表します．ここでピボット のない変数 x_4 に対して

$$x_4 = \gamma$$

と置くと，

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma \\ -\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすべての解をパラメータ γ で表すことができます．特に $\gamma = 1$ としてみると斉次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ に $\vec{x} = {}^t(1 \ -1 \ -1 \ 1) \neq \vec{0}$ と $\vec{0}$ でない解（非自明解）が存在することが分かります．

演習 3.3. (3.4) の行基本変形をしてみましょう．

斉次方程式の解法の例をもう 1 つ紹介しましょう．

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{3.5}$$

について考えましょう．行列 A を基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \tag{3.6}$$

となりますが，このことから拡大行列は

$$(A|\vec{0}) \to (B|\vec{0})$$

と変形されます．非斉次項は行基本変形をしても常に $\vec{0}$ となるからです．したがって，方程式は

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}$$

と必要十分であることが分かります．ここで，拡大行列の 3 行と 4 行の表す方程式

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$$

はすべての $\vec{x}$ が満たしますから，書いてありません．ここでピボット のない変数 x_3 と x_4 に対して

$$x_3 = \gamma_1,\ x_4 = \gamma_2$$

と定めると，解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ -\gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

と 2 個のパラメータで表示されます．この解はすべての解をパラメータで表現していて，**一般解**と呼びます．特に $\gamma_1 = 1$，$\gamma_2 = 0$ とすると，斉次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ に非自明解 $\vec{x} = {}^t(1\ \ -1\ 1\ 0)$ が存在することが分かります．

演習 3.4. (3.6) の行基本変形をしましょう．また (3.7) で，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が平行でないことを示しましょう．

演習 3.5. 以下の行列 A に対して斉次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を解きましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$　　**(2)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 4 & -12 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

以上の計算から次の事実が理解できると思います．

注意 3.1. $m \times n$ 行列 A に対して斉次方程式

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

の一般解は $n - \mathrm{rank}(A)$ 個のパラメータで表現することができます．

この事実を理解するためには，ピボット のない変数の個数は，変数 $x_1, \cdots, x_n$ の個数 n からピボット の個数，すなわち $\mathrm{rank}(A)$ を引いたものであることに注意しま

しょう．まだ正確に記述できませんが，このパラメータの個数が斉次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間（(3.8) 参照）の次元となります．

ここで特に $\mathrm{rank}(A) = n$ の場合を考えましょう（上で考えた 2 つの例 (3.3) と (3.5) はこの条件を満たしていないことに注意しましょう）．この場合 A は行基本変形によって

$$A \to \cdots \to A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから，方程式は

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \cdots,\ x_n = 0$$

と同値であることが分かります．したがって $A\vec{x} = \vec{0}$ の解は $\vec{x} = \vec{0}$ に限ります．以上で次の定理 3.1 を証明しました．

> **定理 3.1.** $m \times n$ 行列 A に対して，$\mathrm{rank}(A) = n$ ならば斉次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解は $\vec{x} = \vec{0}$ に限ります．

■核・解空間　$m \times n$ 行列 A に対して $\mathbf{R}^n$ の部分集合として斉次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解全体

$$\ker(A) := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n;\ A\vec{x} = \vec{0}\} \tag{3.8}$$

を考えます．この $\ker(A)$ は A の**核** (*kernel*) または**解空間**と呼ばれ，

$$\vec{x}, \vec{y} \in \ker(A) \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in \ker(A),\ \lambda\vec{x} \in \ker(A)$$

が成立し，和とスカラー倍に関して**閉じている**という性質を持ちます．実際

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}, \quad A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$$

から分かります．このことから，核・解空間は 5.1 節（129 ページ）で学ぶ**部分空間**の例となっています．20 ページの 1.7 節で 2 次元部分空間について説明しましたが，そこでも和とスカラー倍に関して閉じているという性質が本質的であったことを思い出しましょう．

■正方行列の正則性と行列の階数　定理 3.1 の状況を $m = n$ のとき，すなわち A が正方行列であるときに考えましょう．したがって $A \in M_n(\mathbf{R})$ が

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

を満たしているとします．このとき

$$A \to \cdots \to I_n$$

と行基本変形されます．行基本変形が基本行列を左から掛けることに対応することを思い出しましょう．すると基本行列 $F_1, \cdots, F_\ell$ が存在して

$$F_\ell \cdots F_1 A = I_n$$

が従います．ここで $P = F_\ell \cdots F_1$ とすると P は正則行列となります．このことから $A = P^{-1}$ は正則であることが示されました.

定理 3.2. $A \in M_n(\mathbf{R})$ に対して

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

ならば A は正則です.

■定理 3.2 **の逆（**$n = 3$ **の場合）**　74 ページの定理 3.7**(ii)** において，定理 3.2 と逆に $A \in M_n(\mathbf{R})$ が正則ならば $\mathrm{rank}(A) = n$ であることを示します．ここで $n = 3$ の場合に限って，このことを示してみましょう．$\mathrm{rank}(A) < 3$ と仮定します.

$$A \to \cdots \to A_0$$

と狭義の階段行列に行基本変形されたとします．このとき A_0 は以下の行列のどれかです.

$$O_3,\ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このいずれの場合も斉次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ と必要十分である $A_0\vec{x} = \vec{0}$ には非自明解が存在します．正則行列に対しては非自明解が存在しませんから（定理 2.6），A は正則ではないことが分かります.

以上で $\mathrm{rank}(A) \neq 3$ ならば A が正則でないことが示されました．対偶を考えると A が正則ならば $\mathrm{rank}(A) = 3$ であることが従います.

演習 3.6. 上の A_0 に対して斉次方程式 $A_0\vec{x} = \vec{0}$ を解きましょう.

3.2.2　非斉次方程式

■解の存在・非存在　前節の 3.2.1 節では $m \times n$ 行列 A に対して斉次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ について考えました．この 3.2.2 節では，さらに $\vec{b} \in \mathbf{R}^m$ に対して**非斉次方程式**

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

について考えます．このとき何が問題となるのかを理解するために，単純な例

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x+y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \end{array} \right.$$

を考えるます。このとき、座標平面上の 2 直線の交わりが解となりますが，2 直線は平行となり解は存在しません．このように，解が存在しない連立 1 次方程式も存在します．そこで解が存在するかどうかが問題となります．

具体的に連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 11y & + & 5z & = & 5 \end{array} \right. \tag{3.9}$$

を考えましょう．拡大行列で考えると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 11 & 5 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 15 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{array} \right)$$

と変形されます．ここで

$$(1)\ 2r+ = 1r \times (-1),\ 3r+ = 1r \times (-2),\ (2)\ 3r+ = 2r \times (-3)$$

と行基本変形を行いました．最後の拡大行列の 3 行が表す方程式は

$$0x + 0y + 0z = 13$$

となり，これを満たす解は存在しません．ですから (3.9) には解が存在しないことが分かります．最後に

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{array} \right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

と変形すると

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 11 & 5\end{pmatrix} < \operatorname{rank}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 11 & 5 & 5\end{array}\right)$$

が成立することに注意します．このように，非斉次項を表す縦棒で階数が増える場合には解が存在しないことが分かります．

さらに具体例を計算してみましょう．連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1\\ 5x + 6y + 3z + 7w = 1\\ 2x + y + 4z = 6\end{cases}$$

を考えます．与えられた連立 1 次方程式の拡大行列は

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 5 & 6 & 3 & 7 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 0 & 6\end{array}\right) \xrightarrow{(i)} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -4\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(ii)} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{(iii)} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 3 & -1 & 5\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

と行基本変形により階段行列となります．ここで

(i) $2r+=(-5)\times 1r,\ 3r+=(-2)\times 1r,$ (ii) $3r+=1\times 2r,$ (iii) $1r+=(-1)\times 2r$

と行基本変形をしています．変形後の拡大行列を連立 1 次方程式にすると

$$\begin{cases} x \quad +3z - w = 5\\ \quad y \ -2z + 2w = -4\end{cases}$$

となります．これから解は

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3z+w+5\\ 2z-2w-4\\ z\\ w\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\ -4\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

と表示されます．ここで

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 5 & 6 & 3 & 7\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 5 & 6 & 3 & 7 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 0 & 6\end{array}\right)$$

が成立していることに注意しましょう．

演習 3.7. 次の拡大行列が表す連立 1 次方程式に解が存在するかについて調べ，解が存在するならば求めましょう．

(1) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$　**(2)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 11 \\ 6 & 20 & -6 & 3 \\ 0 & 6 & -18 & 1 \end{array}\right)$

ここでは証明しませんが，具体例を多く計算すれば次の定理 3.3 が成立することが分かります．

定理 3.3. **（非斉次方程式の解の存在条件）** A を $m \times n$ 行列とします．このとき $\vec{b} \in \mathbf{R}^m$ に対して連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ に解が存在する必要十分条件は

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|\vec{b})$$

が成立することです．

演習 3.8. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + y - z &= 1 \\ x - 3y + 2z &= 4 \\ 3x - 2y + z &= c \end{cases}$$

に解が存在する条件を求めましょう．

演習 3.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ とします．$A\vec{x} = \vec{b}$ に解が存在する条件を求めましょう．

■特殊解と一般解　非斉次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ に解 $\vec{x}_0$ が存在しているとします．さらに斉次方程式 $A\vec{v} = \vec{0}$ の一般解が

$$\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_k\vec{\beta}_k$$

と表されているとします．このとき $\vec{x}$ を非斉次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の任意の解とすると

$$A(\vec{x} - \vec{x}_0) = A\vec{x} - A\vec{x}_0 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

から

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_k\vec{\beta}_k$$

と表現できます．

3.3　行列の標準形と連立 1 次方程式

3.3.1　列基本変形

$m \times n$ 行列 A に対して，行基本変形の「行」(row) を「列」(column) に換えた変形を考えます．すなわち，次の種類の操作

(i)	i 列と j 列を交換する $(i \neq j)$	$ic \leftrightarrow jc$
(ii)	i 列を λ 倍する $(\lambda \neq 0)$	$ic\times = \lambda$
(iii)	j 列の λ 倍を i 列に加える $(i \neq j)$	$ic+ = jc \times \lambda$

を考えます．この 3 種類の変形を**列基本変形**と呼びます．列基本変形は，(i)，(ii)，(iii) それぞれの場合，A に基本行列

$$\textbf{(i)}\ P_n(i,j),\ \textbf{(ii)}\ Q_n(i,\lambda),\ \textbf{(iii)}\ R_n(i,j,\lambda)$$

を右から掛けることに対応しています．

演習 3.10. 3 列の行列 $X = (\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)$ に対して

$$XP_3(1,3),\ XQ_3(2,\lambda),\ XR_3(1,3,\lambda)$$

を計算してみましょう．そのために，標準単位ベクトルを用いて，基本行列の列ベクトル表示は何かを考えてみましょう．

行列 A は行基本変形を繰り返して

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & & 0 & * \\ & & 1 & * & & 0 & * \\ & & & & \ddots & \vdots & * \\ & & & & & 1 & * \end{pmatrix}$$

という行列に変形できました．さらに，列基本変形を用います．1 行のピボット 1 を用いて，階段行列の形を保ったまま，1 行のピボットの右をすべて 0 にできます．こ

の操作を，2 行，3 行，⋯と繰り返すと

$$\left(\begin{array}{cccccccc}
 & \multicolumn{1}{|c}{1} & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & & 0 & 0\cdots0 \\
\cline{2-3}
 & & & \multicolumn{1}{|c}{1} & 0\cdots0 & & 0 & 0\cdots0 \\
\cline{4-5}
 & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & \multicolumn{1}{|c}{1} & 0\cdots0 \\
\cline{7-8}
 & & & & & & &
\end{array}\right)$$

とピボット以外のすべての成分が 0 という行列に変形できます．次に，1 行のピボットを $(1,1)$ 成分に，2 行のピボットを $(2,2)$ 成分にと，列の交換を用いて交換できます．これを繰り返すと結局

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & 1 & & \\
 & & & 0 & \\
 & & & & \ddots
\end{pmatrix}$$

という行列に変形できます．ここで 1 の個数は A の階数です．

行基本変形は基本行列を右から掛けることに対応し，列基本変形は基本行列を左から掛けることに対応します．したがって，

$$F_r F_{r-1} \cdots F_1 A G_1 G_2 \cdots G_s = \begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & 1 & & \\
 & & & 0 & \\
 & & & & \ddots
\end{pmatrix}$$

を満たす基本行列 $F_1, \cdots, F_r$，$G_1, \cdots, G_s$ が存在します．基本行列は正則ですから

$$F_r F_{r-1} \cdots F_1,\ G_1 G_2 \cdots G_s$$

は正則行列となります．以上で次の定理 3.4 を証明しました．

定理 3.4. **(行列の標準形)** $m \times n$ 行列 A に対して，m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在して

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

が成立します．ここで対角成分の 1 の個数は $\mathrm{rank}(A)$ と同じ個数です．

定理 3.4 からはいろいろな結果が導かれますが，まず上の計算を具体例で考えてみましょう．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -7 & -10 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & -16 & -16 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -16 & -16 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで用いた変形は (1) $2r+ = 1r \times (-1)$, $3r+ = 1r \times (-1)$, (2) $2r\times = -\frac{1}{8}$, (3) $1r+ = 2r \times (-9)$, $3r\times = 2r \times 16$, $3c+ = 1c \times 3$, $4c+ = 1c \times (-4)$, (5) $3c+ = 2c \times (-1)$ です．このことを用いると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と計算されます．

定理 3.5.（行列の標準形の一意性） 定理 *3.4* において対角線に並ぶ 1 の個数は P と Q の選び方に依らず一定です．すなわち，$m \times n$ 行列 A に対して，m 次正則行列 P_1, P_2 と n 次正則行列 Q_1, Q_2 が存在して

$$P_1AQ_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right), \quad P_2AQ_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_s & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \tag{3.11}$$

が成立するならば $r = s$ が成立します.

Proof. 以下で $r \leq s$ としても一般性は失われません.

$$A = P_1^{-1} \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) Q_1^{-1} = P_2^{-1} \left(\begin{array}{c|c} I_s & O \\ \hline O & O \end{array}\right) Q_2^{-1}$$

から

$$P_2P_1^{-1} \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) Q_1^{-1}Q_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_s & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

となりますから $U = P_2P_1^{-1}, V = Q_1^{-1}Q_2$ と定めると

$$U \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) V = \left(\begin{array}{c|c} I_s & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

となります．この左辺を計算するために U と V を

$$U = \left(\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline U_{21} & U_{22} \end{array}\right), \quad V = \left(\begin{array}{c|c} V_{11} & V_{12} \\ \hline V_{21} & V_{22} \end{array}\right)$$

$$U_{11} \in M_r(\mathbb{K}), U_{22} \in M_{m-r}(\mathbb{K}), V_{11} \in M_r(\mathbb{K}), V_{22} \in M_{n-r}(\mathbb{K})$$

とブロックに分けます．すると

$$\left(\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline U_{21} & U_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} V_{11} & V_{12} \\ \hline V_{21} & V_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} U_{11}V_{11} & U_{11}V_{12} \\ \hline U_{21}V_{11} & U_{21}V_{12} \end{array}\right)$$

から

$$\left(\begin{array}{c|c} U_{11}V_{11} & U_{11}V_{12} \\ \hline U_{21}V_{11} & U_{21}V_{12} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_s & O \\ \hline O & O \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_r & O & O \\ \hline O & I_{s-r} & O \\ \hline O & O & O \end{array}\right) \tag{3.12}$$

が導かれます．ブロックごとに等式を考えると

$$U_{11}V_{11} = I_r, \quad U_{11}V_{12} = O, \quad U_{21}V_{11} = O$$

であることがわかります．次の定理 3.6 を用いると U_{11}, V_{11} が正則となりますから，

$$V_{12} = O, U_{21} = O$$

も従います．以上から (3.12) は

$$\left(\begin{array}{c|c} I_s & O \\ \hline O & O \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} U_{11}V_{11} & U_{11}V_{12} \\ \hline U_{21}V_{11} & U_{21}V_{12} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

となりますから，$r = s$ であることが分かります．　□

この定理 3.5 によって，行基本変形によって階段変形にしたときの Pivot の個数によって行列の階数を定めることが論理的に問題ないことが分かりました．

次に上の定理 3.5 の証明で用いた事実を証明します．

定理 3.6. **（左逆行列と右逆行列の一致）** $A \in M_n(\mathbf{K})$ とします．
(i) $AX = I_n$ を満たす $X \in M_n(\mathbf{K})$ が存在するならば A は正則で，$A^{-1} = X$ となります．
(i) $XA = I_n$ を満たす $X \in M_n(\mathbf{K})$ が存在するならば A は正則で，$A^{-1} = X$ となります．

Proof. **(i)** を示します．定理 3.4 を用いると正則な $P, Q \in M_n(\mathbf{K})$ が存在して

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

が成立します．ここで $Y = Q^{-1}XP^{-1}$ とおくと

$$PAQY = PAQQ^{-1}XP^{-1} = PAXP^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$$

から

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) Y = I_n \tag{3.13}$$

が従います．さらに

$$Y = \left(\begin{array}{c|c} Y_{11} & Y_{12} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} \end{array}\right), Y_{11} \in M_r(\mathbf{K}), Y_{22} \in M_{n-r}(\mathbf{K})$$

とブロックに分けると (3.13) は

$$\left(\begin{array}{c|c} Y_{11} & Y_{12} \\ \hline O & O \end{array}\right) = I_n$$

となりますから，$r = n$ であることが分かります．よって

$$PAQ = I_n$$

となります．P, Q が正則ですから

$$A = P^{-1}Q^{-1}$$

となりますが，P^{-1} と Q^{-1} も正則ですから，その積である A も正則であることが従います．

(ii) も同様に示せますから，これは演習とします． □

定理 3.4 から得られる結果を 1 つ説明しましょう．次の定理 3.7 の **(iii)** は第 5 章で今までより理論的な内容を展開するための基礎になります．

定理 3.7. **（斉次連立 1 次方程式の非自明解の存在）** A を $m \times n$ 行列とします．
(i) $\mathrm{rank}(A) < n$ ならば

$$A\vec{x} = \vec{0},\ \ \vec{x} \neq \vec{0}$$

を満たす $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ が存在します．
(ii) $\mathrm{rank}(A) = n$ ならば

$$A\vec{x} = \vec{0}\ \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

が成立します．
(iii) $m < n$ ならば

$$A\vec{x} = \vec{0},\ \ \vec{x} \neq \vec{0}$$

を満たす $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ が存在します．

Proof. **(i)** (3.10) において右辺の最後の列が $\vec{0}$ となります．このことから

$$PAQ\vec{e}_n = \vec{0} \quad したがって \quad A(Q\vec{e}_n) = \vec{0}$$

が成立します．このとき，$\vec{x} := Q\vec{e}_n \neq \vec{0}$ が成立します．
(ii) これはすでに定理 3.1 で示したことです．
(iii) これは $\mathrm{rank}(A) \leq m, n$ であることから $\mathrm{rank}(A) \leq m < n$ が従うことから，**(i)** を用いると証明できます． □

ここで定理 3.7 と定理 3.1 を合わせて次の系 3.1 を得ます．

系 3.1. $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ とすると次の同値が成立します.

$$\mathrm{rank}(A) = n \Leftrightarrow \left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}\right)$$

$$\mathrm{rank}(A) < n \Leftrightarrow \text{ある}\vec{v} \in \mathbf{R}^n\text{に対して}A\vec{v} = \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0}$$

さらに上の定理 3.7 の状況で $m = n$ の場合，すなわち $A \in M_n(\mathbf{R})$ の場合を考えます．このとき A の正則性に関して次の定理 3.8 を得ます.

定理 3.8. $A \in M_n(\mathbf{R})$ に対して次の条件はすべて同値です.
(i) $\mathrm{rank}(A) = n$
(ii) A は正則行列です.
(iii) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ $\left(\Leftrightarrow \ker(A) = \{\vec{0}\}\right)$

Proof. **(i)**⇔**(iii)** は上の系 3.1 に他なりません．**(ii)**⇒**(iii)** は定理 2.6 ですでに示しています．**(i)**⇒**(ii)** は定理 3.2 で示しました. □

正方行列 A が正則であることは A を行基本変形して計算できる階数によって判定できることが分かりました．このことに加えて A の行列式で判定することを第 4 章のの定理 4.16（127 ページ）で解説します.

以上の議論を読み直せば，正則行列は基本行列の積として表すことができることを示しています.

定理 3.9. $A \in M_n(\mathbf{R})$ が正則である必要十分条件は，基本行列 $F_1, \cdots, F_\ell$ が存在して

$$A = F_1 \cdots F_\ell$$

となることです.

ここで $F_1, \cdots, F_\ell$ は一意的には決まりません．基本行列の個数 ℓ も一意的ではありません.

計算例を考えましょう．$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を基本行列の積として表しましょう．A

を行基本変形して

$$
\begin{aligned}
A \ &= \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と単位行列にします．ここで用いた行基本変形は
(1) $2r+=1r\times(-2)$, (2) $3r+=1r\times(-1)$, (3) $1r+=3r\times(-2)$, (4) $2r+=3r\times 1$
でした．このことから

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = I_3
$$

であることが従います．基本行列の逆行列が基本行列であることを用いて

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

と A は基本行列の積として表されました．

演習 3.11. $B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ を基本行列の積として表しましょう．

3.3.2　掃き出し法による逆行列の計算法

具体的に 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めることから始めましょう.

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(i)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(ii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(iii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(iv)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(v)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

から

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = B
$$

が従います．ここで以下の行基本変形を用いました.
(i) $2r+=(-2)\times 1r$, $3r+=(-3)\times 1r$,　(ii) $2r \leftrightarrow 3r$,
(iii) $2r\times=(-1)$, $3r\times=(-1)$,　(iv) $1r+=(-3)\times 3r$, $2r+=(-3)\times 3r$,
(v) $1r+=(-2)\times 2r$

なぜこの計算で A の逆行列が計算できるのか説明しましょう．ここで用いた行基本変形に対応する基本行列を $P_1,\cdots,P_\ell$ とすると

$$
P_\ell \cdots P_1(A|I_3) = (I_3|B)
$$

となります．ここで $P = P_\ell \cdots P_1$ と定めると

$$
(PA|P) = (I_3|B)
$$

を得ます．したがって

$$
PA = I_3, \quad B = P
$$

となることが分かります．P は正則であることが分かっていますから $PA = I_3$ に P^{-1} を右から掛けると $A = P^{-1}$ となり，A が正則で $A^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} = P = B$ を得ます.

この例に関して注意をすると，上の行基本変形で最初の 4 列について着目すると

$$A\vec{x} = \vec{e}_1 \ \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が従います．同様に

$$A\vec{x} = \vec{e}_j \ \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \ (j=2), \ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (j=3)$$

も従います．これから

$$A(\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3) = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) \quad \text{すなわち} \quad AB = I_3$$

も導くことができます．

演習 3.12. 次の行列の逆行列が存在すれば求めましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 　**(2)** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

演習 3.13. （演習 *1.8* 再掲）$\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbf{R}^n$ が関係式

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} & = & \vec{a} \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} & = & \vec{b} \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} & = & \vec{c} \end{cases}$$

満たしているとします．このとき $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表しましょう．これはある行列の逆行列を計算して表しましょう．

第 4 章

行列式

4.1　2 次の行列式

4.1.1　クラメールの公式と行列式の定義

2 次正方行列と 2 次元ベクトル

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

で定まる連立 1 次方程式 $A\vec{v} = \vec{\alpha}$ すなわち

$$\begin{cases} ax + by = \alpha_1 & \quad (1) \\ cx + dy = \alpha_2 & \quad (2) \end{cases}$$

を考えます．$(1) \times d - (2) \times b$ を計算すると

$$(ad - bc)x = \alpha_1 d - \alpha_2 b$$

を得ます．定理 2.7（46 ページ）の直後で注意したように，2 次正方行列の**行列式** ($determinant$) を

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{4.1}$$

と定めると，この式は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b \\ \alpha_2 & d \end{vmatrix}$$

となります．ここで

$$\det(A) = ad - bc \neq 0$$

を仮定すれば

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & b \\ \alpha_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \tag{4.2}$$

と計算されます．同様に計算すれば

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha_1 \\ c & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \tag{4.3}$$

と計算されます．この公式を**クラメールの公式** (*Cramer's rule*) と呼びます．

演習 4.1. 上の y に関する公式 (4.3) を導いてください．

演習 4.2. 次の行列式を計算しましょう．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ **(3)** $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ **(4)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ **(5)** $\begin{vmatrix} a & c \\ 0 & b \end{vmatrix}$ **(6)** $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & b \end{vmatrix}$

4.1.2　行列式の性質

2 次正方行列の基本的な性質について説明します．

定理 4.1. **(i)（各列の線型性）**

$$\det(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\ \vec{b}) = \lambda\det(\vec{x}\ \vec{b}) + \mu\det(\vec{y}\ \vec{b})$$

$$\det(\vec{a}\ \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda\det(\vec{a}\ \vec{x}) + \mu\det(\vec{a}\ \vec{y})$$

(ii)（交代性） $\det(\vec{a}\ \vec{b}) = -\det(\vec{b}\ \vec{a})$

(ii)'（交代性） $\det(\vec{a}\ \vec{a}) = 0$

(iii)（正規性） $\det(I_2) = 1$

定理 4.1 の **(i)** を証明するために，次の補助定理 4.1 を証明しましょう．

補助定理 4.1. $F:\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto a_1x_1 + a_2x_2$ は

$$F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$$

を満たします.

この補助定理 4.1 は

$$\begin{aligned} F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) &= F\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= a_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + a_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(a_1y_1 + a_2y_2) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y}) \end{aligned}$$

によって証明されます．ここで

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

と見て

$$F(\vec{x}) = \begin{vmatrix} x_1 & b_1 \\ x_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad G(\vec{x}) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 \\ a_2 & x_2 \end{vmatrix}$$

に対して補助定理 4.1 を適用すると

$$\left|\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\ \vec{b}\right| = \lambda\left|\vec{x}\ \vec{b}\right| + \mu\left|\vec{y}\ \vec{b}\right|,\ |\vec{a}\ \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}| = \lambda|\vec{a}\ \vec{x}| + \mu|\vec{a}\ \vec{y}|$$

が従います.

演習 4.3. 上の定理 *4.1* の **(ii)** と **(ii)'** を証明してください．ただし **(ii)'** は **(ii)** を用いて証明してください.

定理 4.1 以外の行列式の基本的な性質を説明します.

定理 4.2. **(i)（行列の積の行列式）** $A, X \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\det(AX) = \det(A)\det(X)$$

が成立します.

(i)（転置行列の行列式）

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

Proof. ここでは **(i)** のみ証明します（**(ii)** は演習 4.4 とします）.

$$A = \left(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\right), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}
\det(AX) &= \det\left(x_1\vec{\alpha} + x_2\vec{\beta} \quad y_1\vec{\alpha} + y_2\vec{\beta}\right) \\
&= x_1y_1 \det(\vec{\alpha}\ \vec{\alpha}) + x_1y_2 \det(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) + y_1x_2 \det(\vec{\beta}\ \vec{\alpha}) + x_2y_2 \det(\vec{\beta}\ \vec{\beta}) \\
&= x_1y_2 \det(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) - y_1x_2 \det(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1) \det(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = \det(X)\det(A)
\end{aligned}$$

□

演習 4.4. 定理 *4.2* の **(ii)** を証明してください．これに加えて定理 *4.2* の **(ii)** を用いて定理 *4.1* の列に関する性質から

$$\det\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} + \mu\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} + \mu\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

を導いてください.

次に 2 次正方行列の**正則性**について考えてみます．定理 2.7 の証明における計算を繰り返しますが

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \det(A) \cdot I_2
\end{aligned}$$

となります．ここで $\det(A) = ad - bc \neq 0$ のとき

$$X = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

と定めると

$$AX = XA = I_2$$

を得ます．これから $\det(A) \neq 0$ のとき A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

であることが分かります．

逆に行列 A が正則とします．このとき $AA^{-1} = I_2$ から

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_2) = 1$$

が従います．このとき $\det(A) \neq 0$ が従います．これから次の定理 4.3 が示されました（定理 2.7 の内容と同一ですが，証明の後半は異なります）．

定理 4.3. $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して，

$$A\text{が正則行列である} \iff \det(A) \neq 0$$

が成立します．

この定理 4.3 で示した正則性の特徴付けは，2 次正方行列に限らず成立します．127 ページの定理 4.16 で一般的な場合を証明します．

演習 4.5. 次の行列式の値が 0 となる λ の値を求めましょう．

(1) $\begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

4.2　3 次の行列式

4.2.1　定義と順列の符号

3 次元ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

を定めます．このとき 3 次正方行列

$$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

に対して，A の**行列式**を

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

と定義します.

さらに 2 次の行列式を展開すると

$$|A| = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \tag{4.4}$$

となります．ここで

$$i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i,\ i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

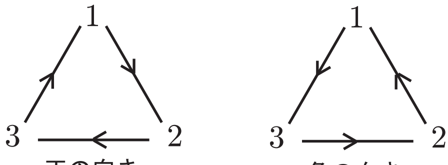
を満たす $(i\ j\ k)$ 全体を S_3 とすると，$(i\ j\ k) \in S_3$ に対してだけ

$$a_ib_jc_k$$

が現れていることに注意しましょう．このような $(i\ j\ k)$ は $3! = 6$ 通りであることが分かります．$a_ib_jc_k$ の前の符号に関しては

$$i \longrightarrow j \longrightarrow k \longrightarrow i$$

が正の向きの場合に正であり，負の場合に負であることも分かります.



ここで $i \neq j,\ j \neq k, k \neq i$ を満たす $(i\ j\ k) \in S_3$ に対して

$$\varepsilon(i\ j\ k) = \begin{cases} +1 & ((i\ j\ k)\text{が正の向き}) \\ -1 & ((i\ j\ k)\text{が負の向き}) \end{cases}$$

と定めます．これを用いると上の 3 次正方行列 $A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して

$$\det(A) = \sum_{i \neq j,\ j \neq k, k \neq i} \varepsilon(i\ j\ k) \cdot a_ib_jc_k \tag{4.5}$$

が成立することに注意しましょう.

後に使うために $(i\ j\ k) \in S_3$ の符号に関して別の見方を紹介します. 右のように 2 つの番号を交換する操作 (**互換**) を繰り返して $(1\ 2\ 3)$ に並び換えていくときに, 偶数回で到達する場合は $(i\ j\ k)$ は正の向き, 奇数回で到達する場合は $(i\ j\ k)$ は負の向きになっています.

$$
\begin{aligned}
&(1\ 2\ 3)\\
&(1\ 3\ 2) \to (1\ 2\ 3)\\
&(2\ 1\ 3) \to (1\ 2\ 3)\\
&(2\ 3\ 1) \to (1\ 3\ 2) \to (1\ 2\ 3)\\
&(3\ 1\ 2) \to (1\ 3\ 2) \to (1\ 2\ 3)\\
&(3\ 2\ 1) \to (1\ 2\ 3)
\end{aligned}
$$

後に一般の次数の行列式を考えるときには, この形で符号を考えます (98 ページの演習 4.13 を参照).

4.2.2　列に関する性質

■基本性質　次に (4.4) において b_1, b_2, b_3（または c_1, c_2, c_3）について整理すると, 次の各列に関する**余因子展開**が成立することにも注意しよう（余因子については後に 4.3.5 節で説明します).

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

この余因子展開を用いると行列式の列に関する基本的な性質をいくつか導くことができます.

(I) (各列に関する線型性) 例えば 1 列に関して

$$
\begin{vmatrix} \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{\alpha} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \tag{4.6}
$$

が成立します.

この性質は 2 次正方行列の性質 **(I)** と同様に証明できます．そのためには補助定理 4.1 と同様の次の補助定理 4.2 を用います．

補助定理 4.2. $F:\ \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}\quad \vec{x} \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ は

$$F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$$

を満たします．

演習 4.6. 補助定理 *4.2* を証明して，(4.6) を示しましょう．

(II) (交代性) 相異なる 2 列を交換すると行列式の値は (−1) 倍されます．例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \tag{4.7}$$

が成立します．

2 次正方行列に対する行列式の交代性を用いて，(4.7) を証明します．実際

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} &= c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= -c_1\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - c_3\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

と証明されます．

最後に次の性質 **(III)** は具体的に計算すれば示せます．

(III) (正規性) 単位行列 I_3 の行列式は

$$|I_3| = 1$$

となります．

■基本性質から導かれる性質　以上の **(I)**，**(II)**，**(III)** が行列式の基本的な性質です．これからいくつかの性質を導くことができます．

(IV) 異なる 2 列が等しいとき行列式の値は 0 となります．例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.8}$$

が成立します．

この場合は 1 列と 2 列を交換すると性質 **(II)** から

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

が得られることから，(4.8) が従います．性質 **(II)** から次の性質 **(II)'** も得られます．

(II)' $(i\ j\ k) \in S_3$ に対して

$$|\ \vec{x}_i\ \vec{x}_j\ \vec{x}_k\ | = \varepsilon(i\ j\ k) \cdot |\ \vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\ |$$

が成立します．

例えば

$$|\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\ \vec{x}_1\ | = -|\ \vec{x}_1\ \vec{x}_3\ \vec{x}_2\ | = |\ \vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\ |$$

と示すことができます．上で互換を用いて説明した $\varepsilon(2\ 3\ 1)$ の意味を思い出しましょう．

(V) $i \neq j$ のとき j 列に i 列の λ 倍を加えても行列式の値は変わりません．例えば

$$|\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ | = |\ \vec{a} \quad (\vec{b} + \lambda\vec{a}) \quad \vec{c}\ |$$

が成立します．

これは

$$(\text{右辺}) = |\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ | + \lambda|\ \vec{a} \quad \vec{a} \quad \vec{c}\ | = |\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ |$$

から従います．

次に行列の積の行列式に関する公式を紹介します．

(VI) 3 次正方行列 $A,\ X \in M_3(\mathbf{R})$ に対して

$$\det(XA) = \det(X) \cdot \det(A) \tag{4.9}$$

が成立します.

(4.9) にある公式 **(VI)** を証明しましょう．そのために A を $A = \left(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right)$ と

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

を用いての列ベクトル表示します．そして

$$X = (\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)$$

と行列 X を列ベクトル表示します．すると証明すべき式の左辺を計算していくと

$$\begin{aligned}\det(XA) &= \det(X\vec{a}\ X\vec{b}\ X\vec{c}) \\ &= \det\left(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + a_3\vec{x}_3\ X\vec{b}\ X\vec{c}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_i \det(\vec{x}_i\ X\vec{b}\ X\vec{c})\end{aligned}$$

となります．次に 2 列を線型性によって展開します．例えば $\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_1\ X\vec{c}) = 0$ を用いて

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{x}_1\ X\vec{b}\ X\vec{c}\right) &= \det\left(\vec{x}_1\ \ (b_1\vec{x}_1 + b_2\vec{x}_2 + b_3\vec{x}_3)\ \ X\vec{c}\right) \\ &= b_2 \det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ X\vec{c}\right) + b_3 \det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_3\ X\vec{c}\right)\end{aligned}$$

と計算されます．これと同様の計算を残る 2 項に対して行うと

$$\begin{aligned}\det(XA) = a_1b_2 \det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ X\vec{c}\right) &+ a_1b_3 \det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_3\ X\vec{c}\right) \\ +a_2b_1 \det\left(\vec{x}_2\ \vec{x}_1\ X\vec{c}\right) &+ a_2b_3 \det\left(\vec{x}_2\ \vec{x}_3\ X\vec{c}\right) \\ +a_3b_1 \det\left(\vec{x}_3\ \vec{x}_1\ X\vec{c}\right) &+ a_3b_2 \det\left(\vec{x}_3\ \vec{x}_2\ X\vec{c}\right)\end{aligned}$$

を得ます．最後の式の 6 項の 3 列を展開すると

$$\begin{aligned}\det(XA) &= a_1b_2c_3\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\right) + a_1b_3c_2\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_3\ \vec{x}_2\right)\\ &\qquad + a_2b_1c_3\det\left(\vec{x}_2\ \vec{x}_1\ \vec{x}_3\right) + a_2b_3c_1\det\left(\vec{x}_2\ \vec{x}_3\ \vec{x}_1\right)\\ &\qquad + a_3b_1c_2\det\left(\vec{x}_3\ \vec{x}_1\ \vec{x}_2\right) + a_3b_2c_1\det\left(\vec{x}_3\ \vec{x}_2\ \vec{x}_1\right)\\ &= a_1b_2c_3\cdot\varepsilon(1\ 2\ 3)\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\right) + a_1b_3c_2\cdot\varepsilon(1\ 3\ 2)\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\right)\\ &\qquad + a_2b_1c_3\cdot\varepsilon(2\ 1\ 3)\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\right) + a_2b_3c_1\cdot\varepsilon(2\ 3\ 1)\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\right)\\ &\qquad + a_3b_1c_2\cdot\varepsilon(3\ 1\ 2)\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\right) + a_3b_2c_1\cdot\varepsilon(3\ 2\ 1)\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\right)\end{aligned}$$

を得ます．ここで最後に

$$\det\left(\vec{x}_i\ \vec{x}_j\ \vec{x}_k\right) = \varepsilon(i\ j\ k)\cdot\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\right)$$

が成立することを用いました．さらに $\det(X)$ で括ると

$$\begin{aligned}\det(XA) &= \det(X)\cdot\left(a_1b_2c_3\cdot\varepsilon(1\ 2\ 3) + a_1b_3c_2\cdot\varepsilon(1\ 3\ 2) + a_2b_1c_3\cdot\varepsilon(2\ 1\ 3)\right.\\ &\qquad\left. + a_2b_3c_1\cdot\varepsilon(2\ 3\ 1) + a_3b_1c_2\cdot\varepsilon(3\ 1\ 2) + a_3b_2c_1\cdot\varepsilon(3\ 2\ 1)\right)\\ &= \det(X)\cdot\det(A)\end{aligned}$$

と公式 (VI) が証明されました．

■転置行列の行列式　3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の転置行列の行列式

$$\det({}^tA) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

を考えます．ここでは簡単のために $a_1 \neq 0$ の場合を考えます．A において 1 行の $-\dfrac{a_2}{a_1}$ 倍を 2 行に加えて，1 行の $-\dfrac{a_3}{a_1}$ 倍を 3 行に加えると

$$R\left(1, 3, -\frac{a_3}{a_1}\right) R\left(1, 2, -\frac{a_2}{a_1}\right) A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2' & c_2' \\ 0 & b_3' & c_3' \end{pmatrix}$$

となります．このことから

$${}^tA\,{}^tR\left(1, 2, -\frac{a_2}{a_1}\right) {}^tR\left(1, 3, -\frac{a_3}{a_1}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2' & b_3' \\ c_1 & c_2' & c_3' \end{pmatrix}$$

も従います．ここで基本行列の行列式に関して

$$\left|R\left(1,2,-\frac{a_2}{a_1}\right)\right| = \left|R\left(1,3,-\frac{a_3}{a_1}\right)\right| = \left|{}^tR\left(1,2,-\frac{a_2}{a_1}\right)\right| = \left|{}^tR\left(1,3,-\frac{a_3}{a_1}\right)\right| = 1$$

が成立することを用いると

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2' & c_2' \\ 0 & b_3' & c_3' \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2' & c_2' \\ b_3' & c_3' \end{vmatrix}$$

$$\det({}^tA) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2' & b_3' \\ c_1 & c_2' & c_3' \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2' & b_3' \\ c_2' & c_3' \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c_2' & c_3' \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_2' & b_3' \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2' & b_3' \\ c_2' & c_3' \end{vmatrix}$$

が従います．ここで $B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して $\det({}^tB) = \det(B)$ が成立すること（定理 4.2**(ii)**）を用いると

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

を得ます．以上で次の定理 4.4 を示しました．

定理 4.4. $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して

$$\det({}^tA) = \det(A) \tag{4.10}$$

が成立します．

演習 4.7. $a_1 = 0,\ a_2 \neq 0$ の場合に (4.10) を証明しましょう．

定理 4.4 を用いると，列に関して今まで説明した性質が行の性質についても成立することを示せます．すなわち以下の性質が成立します．

(I)（行に関する線型性）　行列式は各行において線型です．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

が 2 行の線型性として成立します．

これは転置をしても行列式の値が変わらないことと列に関する線型性を用いると

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & \lambda{}^t\boldsymbol{x}+\mu{}^t\boldsymbol{y} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} \\ &= \lambda\begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{x} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{y} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

と証明できます.

(II)（交代性）相異なる 2 行を交換すると行列式の値は (-1) 倍されます．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

が成立します.

これは転置をしても行列式の値が変わらないことと列に関する交代性を用いると

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{b} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{c} & {}^t\boldsymbol{b} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

と証明されます.

以上で説明した行に関する性質 **(I)** と **(II)** を用いると次の性質 **(IV)** と性質 **(II)'**, 性質 **(V)** が従います．これらは，列に関する同様の性質を導いたのと同様に示すことができます.

(IV) 相異なる 2 行が等しい行列式の値は 0 です.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = 0$$

(II)' $(i\ j\ k) \in S_3$ に対して（$1 \leq i, j, k \leq 3$ と $i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i$ を満たす 3 個の番号の順列 $(i\ j\ k)$ のことです.）

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_i \\ \boldsymbol{x}_j \\ \boldsymbol{x}_k \end{vmatrix} = \varepsilon(i\ j\ k) \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{vmatrix}$$

が成立します.

(V) $i \neq j$ のとき i 行の λ 倍を j 行に加えても行列式の値は変わりません．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} + \lambda \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

が成立します.

行列式の具体的な計算方法として，行に関する性質 **(V)** と性質 **(II)** を用いて 1 列の成分が 1 行以外 0 となるように行基本変形するやり方があります．これは定理 4.4 の証明の中でも使ったアイデアですが，加えて余因子展開を用いると 2 次の行列式を計算することに持ち込むことができます．例えば

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2(2 \cdot 6 - 2 \cdot 3) = 12$$

と計算されます．最後に 3 次から 2 次になっているところは 1 列の余因子展開を用いました.

演習 4.8. 次の行列式の値を求めましょう.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　**(2)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$　**(3)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$　**(4)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

■クラメールの公式　次に x, y, z に関する 3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= \alpha_1 & \cdots(1) \\ a_2x + b_2y + c_2z &= \alpha_2 & \cdots(2) \\ a_3x + b_3y + c_3z &= \alpha_3 & \cdots(3) \end{cases}$$

を考えます．2 元連立方程式に帰着させるために，z を消去します．そのために $(1)\times c_2-(2)\times c_1$ を考えると

$$
\begin{array}{lccll}
 & a_1c_2x+b_1c_2y & = & \alpha_1c_2 & \cdots(1)\times c_2 \\
-) & a_2c_1x+b_2c_1y & = & \alpha_2c_1 & \cdots(2)\times c_1 \\
\hline
 & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y & = & \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} & \cdots(\mathrm{I})=(1)\times c_2-(2)\times c_1
\end{array}
$$

を得ます．同様に $(1)\times c_2-(3)\times c_1$ と $(2)\times c_3-(3)\times c_2$ を考えると

$$
\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots(\mathrm{II})=(1)\times c_3-(3)\times c_1
$$

$$
\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots(\mathrm{III})=(2)\times c_3-(3)\times c_2
$$

を得ることができます．

$-b_1\times(\mathrm{III})+b_2\times(\mathrm{II})-b_3\times(\mathrm{I})$ を 2 列の余因子展開を用いて計算すると

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

が従います．ここで

$$
\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.11}
$$

より

$$
Dx = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \left(\text{ただし} D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)
$$

が得られます．したがって $D\neq 0$ のとき

$$
x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

が得られました．y と z についても同様な解の公式があり，次の定理 4.5 が証明できます．

定理 4.5. **（クラメールの公式）** $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき連立 1 次方程式 *(1),(2),(3)* の解は

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

で与えられます.

演習 4.9. $a_1 \times$ *(III)* $- a_2 \times$ *(II)* $+ a_3 \times$ *(I)* を計算して定理 *4.5* の y の公式を導いてください.

演習 4.10. 次の連立 1 次方程式をクラメーの公式を用いて解きましょう.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.2.3　ベクトルの外積・行列式の幾何学的な意味

ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の**外積（ベクトル積）**を右のように定めます．外積 $\vec{b} \times \vec{c}$ は

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \perp \vec{b} \times \vec{c}, \qquad \vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c}$$

を満たします．そのことを示すために公式

$$\det(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}) \tag{4.12}$$

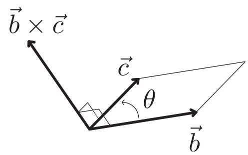
が成立することに注意します．これは，左辺の 3 列の余因子展開から分かります．この公式を用いると

$$(\vec{b} \times \vec{c}, \vec{b}) = \det(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{b}) = 0$$

が従い，$\vec{b} \perp \vec{b} \times \vec{c}$ が分かります．また $\vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c}$ も同様です.

次に $\vec{b} \times \vec{c}$ の大きさについて注意します．2 本のベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が定める平行四辺形の面積 S について考えます．$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ とします．このとき

$$
\begin{aligned}
S &= ||\vec{b}|| \cdot ||\vec{c}|| \cdot \sin\theta \\
&= ||\vec{b}|| \cdot ||\vec{c}|| \cdot \sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= ||\vec{b}|| \cdot ||\vec{c}|| \cdot \sqrt{1-\left(\frac{(\vec{b},\vec{c})}{||\vec{b}|| \cdot ||\vec{c}||}\right)^2} \\
&= \sqrt{||\vec{b}||^2 \cdot ||\vec{c}||^2 - (\vec{b},\vec{c})^2}
\end{aligned}
$$



から

$$
\begin{aligned}
S^2 &= ||\vec{b}||^2 \cdot ||\vec{c}||^2 - (\vec{b},\vec{c})^2 \\
&= \left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right) - (b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2 \\
&= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 = ||\vec{b}\times\vec{c}||^2
\end{aligned}
$$

を得ます．すなわち

$$
S = ||\vec{b}\times\vec{c}|| \tag{4.13}
$$

を示しました．$\vec{b}$ と $\vec{c}$ に垂直で大きさが S であるベクトルは 2 本ありますが，そのどちらが $\vec{b}\times\vec{c}$ になるのかについて軽く説明します．座標系が**右手系**の場合は，$\vec{b}$ から $\vec{c}$ へ右手の親指以外の 4 本の指を揃えて向かうときに親指が向かう方向が $\vec{b}\times\vec{c}$ です（**右ねじの向き**）．また座標系が**左手系**の場合は，同じことを左手で行います．（前ページの図は，右手系の場合を考えています．）詳しくは述べられませんが (4.12) を用いて得られる

$$
\det(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{b}\times\vec{c}) = ||\vec{b}\times\vec{c}||^2 > 0
$$

が $\vec{b}\times\vec{c}\neq\vec{0}$ であるときに成立することから，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{b}\times c$ が標準単位ベクトルを用いた $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ と同じ「向き」を持ちます．このことから以上の事実が示せます．

公式 (4.13) を用いて，3 次の行列式の幾何的な性質について説明します．3 本のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が定める平行 6 面体の体積を V とします．$\vec{b}$，$\vec{c}$ が定める平行四辺形を底面として体積 V を考えます．すると垂直方向 $\vec{b}\times\vec{c}$ と $\vec{a}$ とのなす角を φ とすると，高さ h は

$$
h = |\ ||\vec{a}|| \cdot \cos\varphi\ | = \left| ||\vec{a}|| \cdot \frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}\times\vec{c}||} \right| = \left| \frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{b}\times\vec{c}||} \right|
$$

と計算されます．これから

$$
V = S \cdot h = ||\vec{b}\times\vec{c}|| \cdot \left| \frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{b}\times\vec{c}||} \right| = \left| (\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}) \right| = \left| \det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \right|
$$

となります.

演習 4.11. ベクトルの外積について以下の性質が成立することを示しましょう.
(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},\quad \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$　**(2)** $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

演習 4.12. $\vec{a}={}^t(1\ 1\ 0)$, $\vec{b}={}^t(0\ 1\ -1)$, $\vec{c}={}^t(1\ 2\ 3)$ に対して，以下を求めましょう.
(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積.　**(2)** $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交する単位ベクトル.
(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$, $\vec{c}$ が張る平行六面体の体積.

4.3　n 次の行列式

4.3.1　順列・置換とその符号

■順列と置換　3 次の行列式を表現する方法の 1 つに，$1,2,3$ を並べた順列 $(i\ j\ k)\in S_3$ を用いて

$$\begin{vmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{vmatrix}=\sum_{(i\ j\ k)\in S_3}\varepsilon(i\ j\ k)\cdot a_i b_j c_k \tag{4.14}$$

と定義するものがありました．一般に n 次の正方行列 $A\in M_n(\mathbf{R})$ に対して行列式を定義するのに，この表現を拡張することを考えます．そのために順列の符号 $\varepsilon(i\ j\ k)$ を定義する必要が生じます．この 4.3.1 節では，順列とその符号について議論します.

3 次の行列式であれば $1,2,3$ を並べた順列 $(i\ j\ k)$ として話を進めても十分でしたが，これを少し言い換えることにします．例えば順列 $(3\ 1\ 2)$ は写像

$$\sigma:\ \{1,2,3\}\longrightarrow\{1,2,3\}$$

で条件

$$\sigma(1)=3,\ \sigma(2)=1,\ \sigma(3)=2$$

を満たすものと考えます．順列 $(i\ j\ k)\in S_3$ は写像写像

$$\tau:\ \{1,2,3\}\longrightarrow\{1,2,3\}$$

で条件

$$\tau(1)=i,\ \tau(2)=j,\ \tau(3)=k$$

を満たすものですが，i, j, k が $1,2,3$ を並べたものですから τ は全射でかつ単射，すなわち全単射であることが分かります.

逆に

$$\rho\colon\ \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$$

が全単射であるとき，$(\rho(1), \rho(2), \rho(3))$ は $1, 2, 3$ を並べたものとなります．実際，ρ が単射であることから，$\rho(1), \rho(2), \rho(3)$ は相異なります．また ρ が全射であることから $\{\rho(1), \rho(2), \rho(3)\} = \{1, 2, 3\}$ となります．

このように以下では，$1, 2, \cdots, n$ を並べた順列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ と全単射

$$\sigma\colon\ \{1,2,\cdots,n\} \longrightarrow \{1,2,\cdots,n\}$$

で

$$\sigma(1) = i_1, \cdots, \sigma(n) = i_n$$

を満たすものと考えます．全単射として考えたときに σ のことを n 次の**置換**と呼びます．そして

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

と記します．

以下では n 次の置換全体の集合を S_n で表します．

■置換の符号　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$ に対してはすでに符号 $\varepsilon(i_1, i_2, i_3)$ を定義しています．これと整合的になるように $\sigma \in S_n$ に対して符号を定義します（整合性については演習 4.13 を参照）．$1 \leq i < j \leq n$ を満たす $i,\ j$ に対して

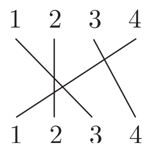
$$\sigma(i) > \sigma(j)$$

であるとき (i, j) は σ で反転されるといいます．例えば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

においては

$$\sigma(1) = 3 > 2 = \sigma(2)$$
$$\sigma(1) = 3 > 1 = \sigma(4)$$
$$\sigma(2) = 2 > 1 = \sigma(4)$$
$$\sigma(3) = 4 > 1 = \sigma(4)$$



から $(1,2)$, $(1,4)$, $(2,4)$, $(3,4)$ が σ によって反転されます．このことは右上図から

すぐに分かります．すなわち，i と $\sigma(i)$ を結んだ線分と j と $\sigma(j)$ を結んだ線分が交わっている場合が反転している (i,j) に対応するからです．

一般に $\sigma \in S_n$ によって反転される (i,j) の個数を σ の**反転数**と呼びます．そして反転数が偶数のとき σ を**偶置換**と呼び，奇数のとき**奇置換**と呼びます．このとき置換 σ の**符号**を

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma\text{が偶置換}) \\ -1 & (\sigma\text{が奇置換}) \end{cases}$$

と定めます．

演習 4.13. $\sigma \in S_3$ に対して反転数を求め $\varepsilon(\sigma)$ を計算しましょう．

演習 4.14. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ の反転数と符号を求めましょう．

以下では 2 段階にわたって置換の符号を言い換えていきます．そのために総和の記号に対応する積の記号を定めます．以下では A を有限集合

$$A = \{a_1, \cdots, a_n\}$$

とします．そして

$$f : A \longrightarrow \mathbf{K}$$

を $\mathbf{K}$ に値をとる A 上の函数とします．このとき積の記号を

$$\prod_{a\in A} f(a) := f(a_1)\cdots f(a_n)$$

と定めます．この積の記号については必要に応じてその性質を説明していくことにします．

次に $\{1, \cdots, n\}$ の 2 点集合の全体の集合として

$$\Omega_n := \{\{i,j\}; i \neq j,\ i,j \in \{1,2,\cdots,n\}\}$$

と定めます．例えば $n = 3$ と $n = 4$ の場合は

$$\Omega_3 := \{\{1,2\},\{1,3\},2,3\}$$

$$\Omega_4 := \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},2,3,\{2,4\},\{3,4\}\}$$

となります．これを用いると $\sigma \in S_n$ に対して

$$\tilde{\varepsilon}(\sigma) := \prod_{\{i,j\}\in\Omega_n, i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \tag{4.15}$$

と定義できます．例えば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

のときは

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}(\sigma) &= \frac{3-2}{1-2}\cdot\frac{3-4}{1-3}\cdot\frac{3-1}{1-4}\cdot\frac{2-4}{2-3}\cdot\frac{2-1}{2-4}\cdot\frac{4-1}{3-4} \\
&= (-1)\frac{2-3}{1-2}\cdot\frac{3-4}{1-3}\cdot(-1)\frac{1-3}{1-4}\cdot\frac{2-4}{2-3}\cdot(-1)\frac{1-2}{2-4}\cdot(-1)\frac{1-4}{3-4} \\
&= (-1)^4 = +1
\end{aligned}$$

と計算されます．この途中の計算で (-1) が 4 回出てきましたが，σ によって反転される $\{i,j\}$ に対応していることに注意してください．

　一般に $\sigma \in S_n$ とすると，$\{i,j\} \in \Omega_n$ に対して σ が単射ですから $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ となります．このことから

$$\{\sigma(i), \sigma(j)\} \in \Omega_n$$

が分かります．さらに写像

$$\sigma^{\#} : \Omega_n \longrightarrow \Omega_n \quad \{i,j\} \mapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\}$$

を定義すると，$\sigma^{\#}$ は全単射であることが分かります．このことから $\{i,j\} \in \Omega_n$ に対して $\tilde{\varepsilon}$ の定義を与えた (4.15) の分子および分子の双方に

$$i - j \text{ または } -(i-j)$$

がただ 1 回現れることが分かり

$$\tilde{\varepsilon}(\sigma) = \pm 1$$

が従います．さらに $i < j$ のときに $\sigma(i) > \sigma(j)$ ならば反転数が 1 個増えて，同時に $\tilde{\varepsilon}(\sigma)$ の符号が (-1) 倍されることに注意すれば

$$\tilde{\varepsilon}(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$$

であることも従います．

演習 4.15. 上の $\sigma^{\#}$ が全単射であることを示しましょう．ただし次の定理を用いて単射であること示すだけで十分です．

定理　X を有限集合とします．このとき $f : X \to X$ に対して

$$f\text{は全射である} \Leftrightarrow f\text{は全射である}$$

　置換の符号についてさらにもう一段階の言い換えを行いますが，そのためにはさらに準備が必要となります．

■置換の積　$\sigma,\ \tau \in S_n$ を考えましょう．

$$\sigma:\ \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \tau:\ \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$$

を合成した

$$\tau \circ \sigma:\ \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\} \quad i \mapsto \tau(\sigma(i))$$

も全単射となりますから，$\tau \circ \sigma \in S_n$ であることが分かります．写像の合成の記号 $\circ$ を省略して $\tau\sigma$ と記します．

まず具体的に合成の例を紹介しましょう．

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

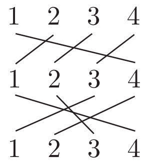
とします．このとき

$$\omega\rho(1) = \omega(\rho(1)) = \omega(4) = 2, \quad \omega\rho(2) = \omega(\rho(2)) = \omega(1) = 4$$
$$\omega\rho(3) = \omega(\rho(3)) = \omega(2) = 3, \quad \omega\rho(4) = \omega(\rho(4)) = \omega(3) = 1$$

から

$$\omega\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．



演習 4.16. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して $\sigma\tau$ と $\tau\sigma$ を計算しましょう．

一般に

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$$

と 3 つの写像があるとしましょう．このとき合成の順序について

$$(h \circ g) \circ f = f \circ (g \circ h)$$

が成立します．このことから 3 個の置換 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n$ に対して

$$\sigma_1(\sigma_2\sigma_3) = (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$$

が成立することが従います．従って行列の積と同様に $\sigma_1, \cdots, \sigma_\ell \in S_n$ に対して

$$\sigma_1 \cdots \sigma_\ell$$

が紛れることなく定義できることが分かります.

置換の積の符号に関して重要な性質を示すために，総和と積の記号について補足をします．有限集合 A と写像

$$f: A \to \mathbf{K}, \quad g: A \to \mathbf{K}$$

があるとします．このとき

$$\prod_{a \in A} f(a)g(a) = \left(\prod_{a \in A} f(a)\right) \cdot \left(\prod_{a \in A} g(a)\right) \tag{4.16}$$

が成立します．これは

$$f(a_1)g(a_1)\cdots f(a_n)g(a_n) = f(a_1)\cdots f_{a_n} \cdot g(a_1)\cdots g(a_n)$$

に他なりません．さらに全単射

$$\varphi: A \to A$$

があるとしましょう．このとき

$$\prod_{a \in A} f(\varphi(a)) = \prod_{a \in A} f(a) \tag{4.17}$$

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A} f(\varphi(a)) \tag{4.18}$$

が成立します．例えば (4.16) の左辺は

$$f(\varphi(a_1))\cdots f(\varphi(a_i))\cdots f(\varphi(a_n))$$

ですが，i が動くとき $\varphi(a_i)$ が A のすべての要素にただ一度通ることを考えると理解できるはずです.

以上の準備で置換の積の符号について以下の定理 4.6 が示せます.

定理 4.6. $\sigma, \sigma' \in S_n$ に対して

$$\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$$

が成立します.

Proof.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma\sigma') &= \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma\sigma'(i)-\sigma\sigma'(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma(\sigma'(i))-\sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i)-\sigma'(j)} \cdot \frac{\sigma'(i)-\sigma'(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma(\sigma'(i))-\sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i)-\sigma'(j)} \cdot \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma'(i)-\sigma'(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\{k,\ell\},k<\ell} \frac{\sigma(k)-\sigma(\ell)}{k-\ell} \cdot \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma'(i)-\sigma'(j)}{i-j} = \varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\sigma')
\end{aligned}
$$

以上の式変形において (4.16), (4.17) を用いていることに注意しましょう．特に (4.17) を適用するにあたって

$$\sigma'^{\#} : \Omega_n \to \Omega_n$$

が全単射であることを用いています. □

■置換の逆　　一般に集合 X から集合 Y への写像

$$f:\ X \longrightarrow Y$$

が全単射であるとします．このとき $y \in Y$ に対してただ 1 つの $x \in X$ が存在して

$$f(x) = y \tag{4.19}$$

が成立します．このとき写像

$$f^{-1}:\ Y \longrightarrow X$$

を (4.19) を用いて $f^{-1}(y) = x$ によって定義します．$f^{-1}:\ Y \longrightarrow X$ も全単射になることに注意しましょう.

置換について具体例を見てみましょう．4 次の置換

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を考えましょう．$\sigma(x) = 1$ を満たすのは $x = 2$ ですから $\sigma^{-1}(1) = 2$ です．$\sigma(x) = 2$ を満たすのは $x = 3$ ですから $\sigma^{-1}(2) = 3$ です．これを繰り返すと

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．一般に n 次の置換 $\sigma \in S_n$ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ から $\{1, 2, \cdots, n\}$ への全単射ですから，その逆写像

$$\sigma^{-1}:\ \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, n\}$$

は置換を定めます．そして

$$\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = \mathrm{id}$$

が成立します．特に

$$\varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma \cdot \sigma^{-1}) = \varepsilon(\mathrm{id}) = 1$$

から

$$\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) \tag{4.20}$$

が成立します．

演習 4.17. 次の置換に対して逆置換を求めましょう．
(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　**(2)** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

■互換　次に単純な置換を定義します．$1 \leq i < j \leq n$ のとき $\tau = (i\ j) \in S_n$ は

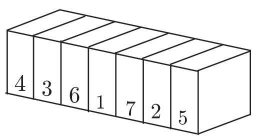
$$\tau(i) = j,\ \tau(j) = i,\ \tau(k) = k\ (k \neq i, j)$$

で定まる n 次の置換です．例えば 4 次の場合に

$$(1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

となります．このように，2 個の番号を交換する置換のことを**互換**と呼びます．

第 1 巻から第 7 巻までの全集があるとしましょう．それが右のように乱雑に並べられているとします．これを左から第 1，第 2 巻，$\cdots$ となるように並び替えまることを考えます．そのために今の状態を



$$(4\ 3\ 6\ 1\ 7\ 2\ 5)$$

と表します．第 7 巻を左から 7 番目にするために，5 と 7 を交換します．これを

$$(4\ 3\ 6\ 1\ 7\ 2\ 5) \xrightarrow{(5\ 7)} (4\ 3\ 6\ 1\ 5\ 2\ 7)$$

と表します．次に 6 を左から 6 番目にするために 2 と 6 を交換し

$$(4\ 3\ 6\ 1\ 5\ 2\ 7) \xrightarrow{(2\ 6)} (4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 6\ 7)$$

と表します．この状態では 5 は左から 5 番目にありますからそのままにして，4 を左から 4 番目に移し，3 を左から 3 番目に移すと

$$(4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 6\ 7) \xrightarrow{(1\ 4)} (1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7) \xrightarrow{(2\ 3)} (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$$

と左から順番通りに直ります．これを $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ から逆に追っていくと

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7) &\xrightarrow{(2\ 3)} (1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7) \xrightarrow{(1\ 4)} (4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 6\ 7)\\ &\xrightarrow{(2\ 6)} (4\ 3\ 6\ 1\ 5\ 2\ 7) \xrightarrow{(5\ 7)} (4\ 3\ 6\ 1\ 7\ 2\ 5)\end{aligned}$$

から

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (5\ 7) \cdot (2\ 6) \cdot (1\ 4) \cdot (2\ 3)$$

であることが分かります．一般には次の定理 4.7 が成立します．

定理 4.7. $\sigma \in S_n$ は有限個の互換 τ_1，$\cdots$，τ_ℓ の積（合成）として

$$\sigma = \tau_\ell \cdots \tau_1 \tag{4.21}$$

と表せます．

演習 4.18. 次の置換を互換の積で表しましょう．

(1) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　**(2)** $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

置換の符号についてさらに言い換えを行います．そのためにはこの定理 4.7 に加えて互換の符号に関する次の定理 4.8 が必要となります．

定理 4.8. 互換 $\tau = (k\ \ell) \in S_n$ に対して

$$\varepsilon(\tau) = -1$$

が成立します．

Proof. **(I)** まず $\tau = \tau_0 = (1\ 2)$ の場合を考えます．反転数を考えれば明らかに

$$\varepsilon(\tau_0) = -1$$

です．または

$$\frac{\tau_0(1) - \tau_0(2)}{1-2} = \frac{2-1}{1-2} = -1$$

であることと $i \neq 1, 2$ において

$$\frac{\tau_0(1) - \tau_0(i)}{1-i} \cdot \frac{\tau_0(2) - \tau_0(i)}{2-i} = \frac{2-i}{1-i} \cdot \frac{1-i}{2-i} = 1$$

からも分かります.

(II) $\{1, 2\} \cap \{k, \ell\} =$ のとき

$$\sigma(1) = k, \sigma(2) = \ell, \sigma(k) = 1, \sigma(\ell) = 2, \sigma(i) = i\ (i \neq 1, 2, k, \ell)$$

である $\sigma \in S_n$ を定めると

$$\tau = \sigma^{-1}\tau_0\sigma$$

が成立します．これから

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\tau_0)\varepsilon(\sigma)$$

となります．さらに

$$\varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1}\sigma) = \varepsilon(id) = 1$$

が分かりますから

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau_0) = -1$$

が従います.

(III) 残るは $i \neq 1, 2$ として $\tau = (1\ i), (2\ i)$ の場合ですが，これは (II) と同様に示すことができます. □

定理 4.7 の状況，すなわち (4.21) が成立するとします．すると定理 4.6 を繰り返し使うと

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell}$$

であることが分かります．置換 $\sigma \in S_n$ の反転数の偶奇は置換を互換の積として表したときの個数の偶奇に一致します．以上から次の定理 4.9 が従います.

定理 4.9. $\sigma \in S_n$ が互換の積として

$$\sigma = \tau_\ell \cdots \tau_1 = \tau'_{\ell'} \cdots \tau'_1$$

と 2 通りに表現されているとします．このとき ℓ と ℓ' の偶奇は一致します．

■巡回置換・隣接互換　置換について学ぶ機会はそうそうないでしょうから，いくつかの点について補足します．

まず定理 4.7 の別証明です．$k_1, \cdots, k_r \in \{1, 2, \cdots, n\}$ はお互いに異なるとします．このとき

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_r & k_1 \end{pmatrix}$$

を**巡回置換**と呼んで $\sigma = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_r)$ と記します．上で出てこない数は σ で動かないという約束を設けていて，この σ は

$$\sigma(k_1) = k_2, \sigma(k_2) = k_3, \cdots, \sigma(k_{r-1}) = k_r, \sigma(k_r) = k_1$$

$$\sigma(i) = i \quad (i \neq k_1, \cdots, k_r)$$

で定まる置換です．具体例として

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

を考えます．σ_1 で動かない，例えば $\sigma_1(2) = 2$ などは省略する約束を設けていますから

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 1 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

と表記しても構いません．さらに列の順番を変えても写像自体は分かりますから

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 9\ 7\ 4)$$

となります．これは

$$1 \xrightarrow{\sigma_1} 3 \xrightarrow{\sigma_1} 9 \xrightarrow{\sigma_1} 7 \xrightarrow{\sigma_1} 4 \xrightarrow{\sigma_1} 1$$

と 1 から始めて σ_1 で写していけば 1 に戻りますが，それが巡回置換の意味です．

定理 4.10. 任意の $\sigma \in S_n$ は巡回置換の積で表せます．

Proof.

$$\{\sigma^0(1) = 1,\ \sigma(1),\ \sigma^2(1), \cdots\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$$

とすると

$$\sigma^i(1) = \sigma^j(1), \quad 0 \leq i < j$$

を満たす i, j が存在します．この性質を満たす最小の j を j_0 とすると、対応する i は $i = 0$ となります．実際 $i > 0$ とすると

$$1 = \sigma^0(1) = \sigma^{j-i}(1)$$

において $j - i < j$ から j の最小性に矛盾します．この $j = j_0$ を r とすると

$$1,\ \sigma(1),\ \sigma^2(1),\ \sigma^3(1),\ \cdots, \sigma^{r-1}(1)$$

はすべて異なる。さらに、ここに含まれない数字で最小のものを k とするとき、同じプロセスを繰り返すことになります． □

ここで述べた証明を具体的に説明してみましょう．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

を考えます．1 から始めて

$$1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 9 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 1$$

と σ で動かしていくと 1 に戻ります．さらにここに現れていない数で最小である 2 から始めて

$$2 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 2$$

と σ で動かすと 2 に戻ります．今まで現れていない 8 は

$$8 \xrightarrow{\sigma} 8$$

とそれ自身に写ります．このことから

$$\sigma = (1\ 3\ 9\ 7\ 4) \cdot (2\ 6\ 5)$$

と σ は巡回置換の積で表せることが分かります（各 i を両辺の写像によって写すとどうなるか調べてみましょう）．

巡回置換は互換の積で表せます。具体的には $k_1, \cdots, k_r \in \{1, 2 \cdots, n\}$ がお互いに異なるとするとき

$$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r) = (k_1\ k_r)(k_1\ k_{r-1}) \cdots (k_1\ k_2) \tag{4.22}$$

が成立します．実際，帰納的に

$$(k_1\ k_r)(k_1\ k_2\ \cdots\ k_{r-1}) = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_{r-1}\ k_r)$$

を用います．また $k_1, \cdots, k_r$ のそれぞれが (4.22) の両辺の写像で写る像がどうなるか調べてみましょう．

このことから例えば

$$(1\ 3\ 9\ 7\ 4) = (1\ 4)(1\ 7)(1\ 9)(1\ 3),\ (2\ 6\ 5) = (2\ 5)(2\ 6)$$

が従います．よって

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 4)(1\ 7)(1\ 9)(1\ 3)(2\ 5)(2\ 6)$$

と σ が互換の積として表されます．このように 4.7 が定理 4.10 と公式 (4.22) によって導かれます．

演習 4.19. 次の置換を巡回置換で表して，さらに互換の積で表しましょう．

(1) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 9 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

(2) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 9 & 7 & 1 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

次に互換の符号が -1 であることを示す定理 4.8 の別の証明を与えましょう．$i \in \{1, \cdots, n-1\}$ のとき互換

$$s_i = (i\ i+1) \in S_n$$

を**隣接互換**と呼びます．このとき

$$\varepsilon(\tau_i) = -1$$

は反転数が 1 ですから簡単に示せます．実はすべての互換は隣接互換を用いて具体的に表すことができます．例えば

$$(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6)(4\ 5)(3\ 4) = (3\ 6)$$

が成立します．これは各 i の両辺による像を計算すれば示すことができます．また

$$(3,4,5,6) \mapsto (4,3,5,6) \mapsto (4,5,3,6) \mapsto (4,5,6,3) \mapsto (4,6,5,3) \mapsto (6,4,5,3)$$

と隣どうし交換していって 3 と 6 を交換することに対応します．一般には $i<j$ であるとき

$$(i\ i+1)(i+1\ i+2)\cdots(j-1\ j)(j-2\ j-1)\cdots(i\ i+1)=(i\ j)$$

と $\tau=(i\ j)$ は $2(j-1)+1$ この隣接互換の積で表せます．このことから

$$\varepsilon(\tau)=(-1)^{2(j-i)+1}=-1$$

であることが示せます．

4.3.2　行列式の定義

■列による定義　n 次正方行列 $A\in M_n(\mathbf{R})$ を考えます．A の (i,j) 成分，すなわち i 行 j 列を a_{ij} とするとき A の行列式を

$$\det(A) := \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} \tag{4.23}$$

によって定義します．ここで S_n は $n!$ 個の要素からなる集合ですから $n!$ 項の和になります．また 96 ページの (4.14) によってこの定義は今までの 3 次の行列式の定義と一致します．

　具体的に $n=4$ の場合を考えると $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$ に対応する項は $\varepsilon(\sigma)=-1$ ですから

$$-a_{41}a_{12}a_{23}a_{34}$$

であることが分かります．

演習 4.20. この状況で次の σ に対応する項を求めましょう．
(1) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$　**(2)** $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$

　今後、具体的には 4 次の場合に詳しく調べていきます。そのために 4 次正方行列 $A=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})$ の場合を考えると

$$\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}) = \sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}c_{\sigma(3)}d_{\sigma(4)} \tag{4.24}$$

と表現されることに注意しましょう．

■行による定義・転置行列の行列式 (4.23) で与えた行列式の定義では $\sigma \in S_n$ が与えられたときに 1 列に対して $\sigma(1)$ 行，2 列に対して $\sigma(2)$ 行，3 列に対して $\sigma(3)$ 行という形で行を選びます．実は，行と列の役割を交換した形でも表現できます．

上で考えた $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ に対応する項について考えますが，その前に $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ であることに注意しましょう．(4.23) において σ に対応する項は

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}a_{\sigma(4)4} &= -a_{41}a_{12}a_{23}a_{34} \\ &= -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ &= \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}a_{3\sigma^{-1}(3)}a_{4\sigma^{-1}(4)} \end{aligned}$$

となります．ここで (4.20) で示した $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ であることを用いています．

一般には n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ と $\sigma \in S_n$ に対して

$$\varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

が成立します．さらに写像

$$S_n \longrightarrow S_n \quad \sigma \mapsto \sigma^{-1}$$

は全単射です．このことを用いると $\tau = \sigma^{-1}$ とすると

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \cdot a_{1\tau(1)} \cdot a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} \end{aligned}$$

となります．以上で

$$\det(A) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \cdot a_{1\tau(1)} \cdot a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} \tag{4.25}$$

を示しました．ここで $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ に対して現れる項は $\varepsilon(\tau) = -1$ から

$$-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$$

であることに注意しましょう．4 次正方行列に対しては

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)} d_{\sigma(4)} \tag{4.26}$$

とも表現することができます．(4.24) と (4.26) によって

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

と転置行列の行列式が元の行列式に等しいことが分かります．より一般には $A \in M_n(\mathbf{R})$ に対して

$$\det({}^t A) = \det(A) \tag{4.27}$$

が成立します．実際，$A = (a_{ij})$ として，さらに $B = {}^t A$ の (i, j) 成分を b_{ij} とします．このとき $b_{ij} = a_{ji}$ が成立することに注意しましょう．すると

$$\begin{aligned} \det({}^t A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det(A) \end{aligned}$$

と証明できます．ここで最後に列を主とする行列式の表現 (4.23) を用いました．

■列（行）を置換したときの行列式　$A = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n) \in M_n(\mathbf{R})$ と $\tau \in S_n$ に対して列を並び換えた行列 $(\vec{a}_{\sigma(1)} \ \cdots \ \vec{a}_{\sigma(n)})$ の行列式を考えます．

$$\det(\vec{a}_{\sigma(1)} \ \cdots \ \vec{a}_{\sigma(n)}) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \cdot a_{\tau(1)\sigma(1)} a_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$$

が成立します．ここで，最後の式の項

$$\varepsilon(\tau) \cdot a_{\tau(1)\sigma(1)} a_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$$

について詳しく見てみます．列を表している $\{\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)\}$ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ を覆い尽くしています．そこで A の 1 列 $\vec{a}_1$ のどの成分（行）が現れているか考えると，$\sigma(i) = 1$ である i に対して $\tau(i)$ 行が現れています．すなわち $a_{\tau(\sigma^{-1}(1))1}$ が現れ

ています．同様に A の 2 列 $\vec{a}_2$ のどの成分が現れているかを考えると，$\sigma(i)=2$ である i に対して $\tau(i)$ 行が現れていますから，$a_{\tau(\sigma^{-1}(2))2}$ が現れています．このことから

$$a_{\tau(1)\sigma(1)}a_{\tau(2)\sigma(2)}\cdots a_{\tau(n)\sigma(n)} = a_{\tau\sigma^{-1}(1)1}a_{\tau\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\tau\sigma^{-1}(n)n}$$

が成立します．さらに $\varepsilon(\tau)=\varepsilon(\tau\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma)$ であることを用いると

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}_{\sigma(1)}\ \cdots\ \vec{a}_{\sigma(n)}) &= \sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma)a_{\tau\sigma^{-1}(1)1}a_{\tau\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\tau\sigma^{-1}(n)n}\\ &= \varepsilon(\sigma)\sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau\sigma^{-1})a_{\tau\sigma^{-1}(1)1}a_{\tau\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\tau\sigma^{-1}(n)n}\end{aligned}$$

が従います．さらに $\rho=\tau\sigma^{-1}$ とするとき $\tau\in S_n$ が S_n 全体を覆うとき ρ も S_n のすべての要素を 1 回ずつ覆います．したがって

$$\det(\vec{a}_{\sigma(1)}\ \cdots\ \vec{a}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\sum_{\rho\in S_n}\varepsilon(\rho)a_{\rho(1)1}a_{\rho(2)2}\cdots a_{\rho(n)n} = \varepsilon(\sigma)\det(A)$$

を得ます．以上で

(II)（列に関する交代性）

$$\det(\vec{a}_{\sigma(1)}\ \cdots\ \vec{a}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\cdot\det(\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n) \tag{4.28}$$

特に $\sigma\in S_n$ が互換 $(i\ j)$ であるとき

$$\det(\cdots\ \vec{a}_i\ \cdots\ \vec{a}_j\ \cdots) = -\det(\cdots\ \vec{a}_j\ \cdots\ \vec{a}_i\ \cdots) \tag{4.29}$$

が成立することを証明しました．以上は列の置換（特に交換）に関して考えましたが，行の置換（交換）についても同様の公式

(II)（行に関する交代性）

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}\end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma)\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix},\quad \text{特に } i\neq j \text{ のときに } \begin{vmatrix}\vdots\\ \boldsymbol{a}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_j\\ \vdots\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\vdots\\ \boldsymbol{a}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_i\\ \vdots\end{vmatrix} \tag{4.30}$$

が成立します．

次の性質 **(IV)** は上の **(II)** にある行列式の交代性から導かれます. 実際 $\vec{a}_i = \vec{a}_j = \vec{a}$ または $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}$ とすれば以下の式が得られます.

(IV) 異なる 2 列（2 行）が等しい行列の行列式は 0 となります.

$$|\cdots\vec{a}\cdots\vec{a}\cdots| = 0, \qquad \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a} \\ \vdots \end{vmatrix} = 0$$

■三角行列の行列式・正規性　4 次の上三角行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & * & * & * \\ 0 & \beta & * & * \\ 0 & 0 & \gamma & * \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$ の行列式を計算しましょう．$\sigma \in S_4$ を任意に取ります．A の 1 列から $\sigma(1)$ 行を選ぶとすると，$\sigma(1) = 1$ の場合以外は 0 になってしまいます．以下は $\sigma(1) = 1$ とします．次に A の 2 列から $\sigma(2)$ 行を選びますが，$\sigma(1) \neq \sigma(2)$ ですから，$\sigma(2) = 2$ 以外に 0 とならない選び方はありません．以下は $\sigma(1) = 1$，$\sigma(2) = 2$ とします．さらに．A の 3 列から $\sigma(3)$ 行を選ぶとすると，1 行と 2 行はすでに選ばれていますから，$\sigma(3) = 3$ 以外に 0 とならない選び方はありません．このとき自動的に $\sigma(4) = 4$ が従います．以上から

$$\begin{vmatrix} \alpha & * & * & * \\ 0 & \beta & * & * \\ 0 & 0 & \gamma & * \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta$$

が成立します．次に下三角行列の行列式を考えますが，これは上三角行列に関する議論で列と行を置き換えれば，そのまま公式

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ * & \beta & 0 & 0 \\ * & * & \gamma & 0 \\ * & * & * & \delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta$$

を示すことができます．または転置を用いて

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ * & \beta & 0 & 0 \\ * & * & \gamma & 0 \\ * & * & * & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & * & * & * \\ 0 & \beta & * & * \\ 0 & 0 & \gamma & * \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta$$

と示すこともできます．以上の議論で次の公式が成立することが分かります．

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

特に**正規性**

$$\det(I_n) = 1 \tag{4.31}$$

が成立します．

演習 4.21. *3.1.2* 節（*55* ページ〜）の $P_m(i,j)$, $Q_m(i,\lambda)$, $R_m(i,j,\lambda)$ の行列式を求めましょう．

4.3.3　列と行に関する性質

4.2 節で説明しましたが 3 次の行列式の基本的な性質として **(I)** 各列（行）に関する線型性，**(II)** 交代性，**(III)** 正規性がありました．これまで示していない，各列（行）に関する線型性について議論します．ここでの議論は 3 次の場合と同じものです．

補助定理 4.3. **（列の場合）**$F: \ \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$

$$\vec{x} \mapsto F(\vec{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

は $F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$ を満たします．

補助定理 4.4.　（行の場合）　$F:\ (\mathbf{R}^n)^* \longrightarrow \mathbf{R} \quad \boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$
は $F(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \lambda F(\boldsymbol{x}) + \mu F(\boldsymbol{y})$ を満たします.

この補助定理 4.3 と補助定理 4.4 の証明は 3 変数の場合の補助定理 4.2 とまったく同じですので省略します.

(I) 行と列に関する線型性　行列式の各列，各行に関して線型性が成立します. すなわち，j 列の（i 行の）足し算とスカラー倍と行列式の操作は交換します.

$$|\cdots \lambda\vec{b}_j + \mu\vec{c}_j\ \ \cdots| = \lambda \cdot |\cdots \vec{b}_j\ \ \cdots| + \mu \cdot |\cdots \vec{c}_j\ \ \cdots|$$

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \lambda\boldsymbol{b}_i + \mu\boldsymbol{c}_i \\ \vdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{c}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

次の性質 **(V)** は性質 **(I)** と **(IV)** から得られます.

(V)　$i \neq j$ のとき i 列（i 行）の λ 倍を j 列（j 行）に加えても行列式の値は変わりません.

$$|\cdots \vec{a}_i \cdots \vec{a}_j \cdots| = |\cdots \vec{a}_i \cdots \vec{a}_j + \lambda\vec{a}_i \cdots|, \qquad \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j + \lambda\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

行列式の値を求めるときの具体的な計算は，この **(V)** と交代性 **(II)** などを組み合

わせて三角行列に行基本変形していくことで行います.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & -8 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -12 & -10 & 17 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -9 & 15 \\ 0 & -12 & -10 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 47 \\ 0 & 0 & 26 & 65 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{247}{15} \end{vmatrix} = 247$$

と求まります．実際，最初の等号のところで 1 行と 3 行を交換して，次の等号において 1 行の (-2) 倍を 2 行と 4 行に加えています.

演習 4.22. 次の行列式を計算しましょう.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} 7 & 13 & 10 & 6 \\ 4 & 10 & 6 & 3 \\ 8 & 12 & 11 & 7 \\ 19 & 35 & 27 & 16 \end{vmatrix}$ **(3)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 27 & 2 & 14 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \end{vmatrix}$ **(4)** $\begin{vmatrix} -8 & -10 & 7 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -9 & -9 & 8 & -9 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

4.3.4　行列の積の行列式

(VI) 行列の積と行列式　行列の積と行列式は交換します．すなわち，n 次正方行列 A と B に対して

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{4.32}$$

が成立します.

このことを証明するために次の定理 4.11 を証明します.

定理 4.11. **（行列式の普遍性）** $\mathbf{R}^n$ の n 個の直積から実数の値を取る写像

$$F:\ \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

が次の性質 **(I)** と **(II)** を満たすとします.

(I)（多重線型性）

$$F(\cdots, \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \cdots) = \lambda F(\cdots, \vec{x}, \cdots) + \mu F(\cdots, \vec{y}, \cdots)$$

(II)（交代性） $i \neq j$ において

$$F(\cdots, \vec{a}_i, \cdots, \vec{a}_j, \cdots) = -F(\cdots, \vec{a}_j, \cdots, \vec{a}_i, \cdots)$$

このとき

$$F(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1\ \ \cdots\ \ \vec{a}_n) \cdot F(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$$

が成立します.

Proof. $n = 4$ の場合に証明します. **(II)** において $\vec{a}_i = \vec{a}_j = \vec{a}$ とすれば

$$F(\cdots, \vec{a}, \cdots, \vec{a}, \cdots) = 0 \tag{4.33}$$

が従います. $F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ において

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + a_4\vec{e}_4$$

などを代入すると

$$F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \sum_{1 \leq i,j,k,\ell \leq 4} a_i b_j c_k d_\ell F(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k . \vec{e}_\ell)$$

が成立します. この和は 4^4 項からなりますが, (4.33) によると

$$\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

となる場合以外は 0 となります. よって以下では i, j, k, ℓ が互いに異なる

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & \ell \end{pmatrix}$$

の場合を考えます. 交代性 **(II)** を用いると

$$F(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k . \vec{e}_\ell) = \varepsilon(\sigma) \cdot F(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$$

が従います．このことから

$$
\begin{aligned}
F(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}) &= \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}c_{\sigma(3)}d_{\sigma(4)}\cdot\varepsilon(\sigma)F(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4) \\
&= F(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}c_{\sigma(3)}d_{\sigma(4)} \\
&= F(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})
\end{aligned}
$$

が従います． □

■行列の積と行列式　$A,\ B \in M_n(\mathbf{R})$ とします．このとき

$$
F : \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}
$$

を定義式

$$
F(\vec{b}_n,\cdots,\vec{b}_n) := \det(A\vec{b}_n\ \ \cdots\ \ A\vec{b}_n)
$$

によって定めます．このとき

$$
\begin{aligned}
F(\cdots,\lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\cdots) &= |\cdots\ \ A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})\ \ \cdots| = |\cdots\ \ \lambda A\vec{x}+\mu A\vec{y}\ \ \cdots| \\
&= \lambda|\cdots\ \ A\vec{x}\ \ \cdots| + \mu|\cdots\ \ A\vec{y}\ \ \cdots| \\
&= \lambda\cdot F(\cdots,\vec{x},\cdots) + \mu\cdot F(\cdots,\vec{y},\cdots)
\end{aligned}
$$

と行列式の普遍性の **(I)** が成立します．また $i<j$ のとき

$$
\begin{aligned}
F(\cdots,\vec{b}_i,\cdots,\vec{b}_j,\cdots) &= \left|\cdots\ \ A\vec{b}_i\ \ \cdots\ \ A\vec{b}_j\ \ \cdots\right| = -\left|\cdots\ \ A\vec{b}_j\ \ \cdots\ \ A\vec{b}_i\ \ \cdots\right| \\
&= -F(\cdots,\vec{b}_j,\cdots,\vec{b}_i.\cdots)
\end{aligned}
$$

から行列式の普遍性の **(II)** も成立します．このことから定理 4.11 を用いると

$$
F(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_n) = F(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)\cdot\det(\vec{b}_1\ \ \cdots\ \ \vec{b}_n)
$$

から

$$
\left|A\vec{b}_1\ \ \cdots\ \ A\vec{b}_n\right| = |\vec{a}_1\ \ \cdots\ \ \vec{a}_n|\cdot\left|\vec{b}_1\ \ \cdots\ \ \vec{b}_n\right|,\quad \text{すなわち } |AB| = |A|\cdot|B|
$$

が従います．まとめると次の定理 4.12 を示しました．

定理 4.12. $A, B \in M_n(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \tag{4.34}$$

が成立します.

■行列式の普遍性の応用　$A \in M_n(\mathbf{R})$ と $B \in M_m(\mathbf{R})$, $C \in M_{n,m}(\mathbf{R})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O_{m,n} & B \end{array}\right) = \det(A) \cdot \det(B) \tag{4.35}$$

を証明しましょう．そのために

$$F\colon\ \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

を

$$F(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n) := \det\left(\begin{array}{ccc|c} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n & C \\ \hline & O_{m,n} & & B \end{array}\right)$$

によって定義すると，定理 4.11 の普遍性 **(I)** と **(II)** を満たします．よって

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{array}{ccc|c} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n & C \\ \hline & O_{m,n} & & B \end{array}\right) &= \det(\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n) \cdot \det\left(\begin{array}{ccc|c} \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n & C \\ \hline & O_{m,n} & & B \end{array}\right) \\ &= \det(A) \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} I_n & C \\ \hline O_{m,n} & B \end{array}\right) \end{aligned}$$

が従います.

さらに $1 \leq i \leq n$ を満たす i 列 $\begin{pmatrix} \vec{e}_i \\ \hline \vec{0} \end{pmatrix}$ を用いて列基本変形をすると

$$\det\left(\begin{array}{c|c} I_n & C \\ \hline O_{m,n} & B \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} I_n & O_{n,m} \\ \hline O_{m,n} & B \end{array}\right)$$

となります．ここで

$$G\colon\ \mathbf{R}^m \times \cdots \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}$$

を

$$G(\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_m) := \det\left(\begin{array}{c|ccc} I_n & & O_{n,m} & \\ \hline O_{m,n} & \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_m \end{array}\right)$$

によって定義すると G は定理 4.11 の普遍性 **(I)** と **(II)** を満たします．よって

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{array}{c|c} I_n & O_{n,m} \\ \hline O_{m,n} & \vec{b}_1\ \cdots\ \vec{b}_m \end{array}\right) &= \det\left(\begin{array}{c|c} I_n & O_{n,m} \\ \hline O_{m,n} & \vec{e}_1\ \cdots\ \vec{e}_m \end{array}\right)\cdot\det(\vec{b}_1\ \cdots\ \vec{b}_m) \\ &= \det\left(\begin{array}{c|c} I_n & O_{n,m} \\ \hline O_{m,n} & I_m \end{array}\right)\cdot\det(B) \\ &= \det(I_{n+m})\cdot\det(B) = \det(B)\end{aligned}$$

となります．以上から (4.35) が証明されました．

特に $B \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \det(B) \tag{4.36}$$

が成立します．この (4.36) は，余因子展開，クラメールの公式を示すために用いる基本的な公式です．

以上と同様に $A \in M_n(\mathbf{R})$ と $B \in M_m(\mathbf{R})$，$C \in M_{m.n}(\mathbf{R})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & O_{n,m} \\ \hline C & B \end{array}\right) = \det(A)\cdot\det(B) \tag{4.37}$$

が成立します．このことから $B \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & B & \end{array}\right) = \det(B) \tag{4.38}$$

が成立します．

4.3.5　余因子展開

n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ を $A = (a_{ij})$ と成分表示します．i 行 j 列を除いた $(n-1)$ 次正方行列 A_{ij} を用いて A の (i,j) **余因子** (*cofactor*) を

$$\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

と定義します．例えば

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

に対して

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{pmatrix}, \quad A_{14} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$$

となります．(4.39) の A に対する展開公式を考えてみます．

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_1 \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 1 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\
&\quad + a_3 \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 1 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_4 \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 1 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} 1 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\
&\quad + a_3 \begin{vmatrix} 1 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} 1 & b_4 & c_4 & d_4 \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

が従います．さらに公式 (4.38) を用いると

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \det(A_{11}) - a_2 \det(A_{21}) + a_2 \det(A_{31}) - a_4 \det(A_{41}) \\
&= a_1\tilde{A}_{11} + a_2\tilde{A}_{21} + a_3\tilde{A}_{31} + a_4\tilde{A}_{41}
\end{aligned}$$

が従います．ここで

$$
\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 1 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 1 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}
$$

と行の交換を繰り返していることに注意しましょう．一般には n 次の行列式において

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{j-1} \\ \boldsymbol{a}_j \\ \boldsymbol{a}_{j+1} \\ \vdots \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_j \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{j-1} \\ \boldsymbol{a}_{j+1} \\ \vdots \end{vmatrix}
$$

が成立することに注意しましょう．また途中で公式 (4.36) を用いて 4 次の行列式を 3 次の行列式にしています.

次に 2 列の展開を試みましょう.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\
&= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\
&= -b_1 \det(A_{12}) + b_2 \det(A_{22}) - b_3 \det(A_{32}) + b_4 \det(A_{42}) \\
&= b_1 \tilde{A}_{12} + b_2 \tilde{A}_{22} + b_3 \tilde{A}_{32} + b_4 \tilde{A}_{42}
\end{aligned}
$$

となります．さらに 3 列と 4 列については

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= c_1 \det(A_{13}) - c_2 \det(A_{23}) + c_3 \det(A_{33}) - c_4 \det(A_{43}) && (4.40) \\
&= c_1 \tilde{A}_{13} + c_2 \tilde{A}_{23} + c_3 \tilde{A}_{33} + b_4 \tilde{A}_{43} && (4.41)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= -d_1 \det(A_{14}) + d_2 \det(A_{24}) - d_3 \det(A_{34}) + d_4 \det(A_{44}) && (4.42) \\
&= d_1 \tilde{A}_{14} + d_2 \tilde{A}_{24} + d_3 \tilde{A}_{34} + d_4 \tilde{A}_{44} && (4.43)
\end{aligned}
$$

が成立します.

演習 4.23. 上で与えた 3 列と 4 列の展開を証明しましょう．ここで

$$\begin{vmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{d}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{c} & \vec{a} & \vec{b} & \vec{d}\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\vec{d} & \vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{vmatrix} \tag{4.44}$$

が成立することを示しましょう．

一般には次の定理 4.13 で説明する j 列に関する余因子展開が成立します．

定理 4.13. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ に対して j 列に関する余因子展開

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj}) \\ &= a_{1j}\tilde{A}_{1j} + a_{2j}\tilde{A}_{2j} + \cdots + a_{ij}\tilde{A}_{ij} + \cdots + a_{nj}\tilde{A}_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\tilde{A}_{ij}\end{aligned}$$

が成立します.

これまで列に関する余因子展開について説明してきました．次に行に関する余因子展開を説明します.

定理 4.14. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ に対して i 行に関する余因子展開

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) \\ &= a_{i1}\tilde{A}_{i1} + a_{i2}\tilde{A}_{i2} + \cdots + a_{ij}\tilde{A}_{ij} + \cdots + a_{in}\tilde{A}_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{A}_{ij}\end{aligned}$$

が成立します.

Proof.

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{ij} \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \\ \boldsymbol{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}$$

となります．ここで最左辺の和の中にある行列式において j 列を隣接する列の交換を

繰り返して 1 列に移動させます．すなわち

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \\ \boldsymbol{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}
= \left|\begin{array}{ccccccc}
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \hline
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots
\end{array}\right|
$$

$$
= (-1)^{j-1} \left|\begin{array}{c|ccc|ccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \hline
a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots
\end{array}\right|
$$

$$
= (-1)^{j-1} \left|\begin{array}{c|ccc}
1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
* & & & \\
\vdots & & A_{ij} & \\
* & & &
\end{array}\right| = (-1)^{j-1} \det(A_{ij})
$$

から

$$
\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i-1+j-1} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{A}_{ij}
$$

が従います（上で $a_{i,j}$ と行番号と列番号を区別するために間にカンマを入れています）． □

4.3.6　クラメールの公式・行列の正則性と行列式

n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ に対して，$\tilde{A}$ を i 行 j 列が (j,i) 余因子 $\tilde{A}_{ji}$ である n 次正方行列を表し，**余因子行列**と呼びます．A の余因子行列を $\mathrm{adj}(A)$ と表すこともあります．このとき次の定理 4.15 が成立します．

定理 4.15.

$$
\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A) \cdot I_n
$$

定理 4.15 を $n=4$ の場合に証明します．$A=(a_{ij})\in M_4(\mathbf{R})$ を，簡単のため

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

と記します．ここで 1 列を 3 列と同じにした行列の行列式を 1 行の余因子展開によって計算すると

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ c_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\ &= c_1\tilde{A}_{11} + c_2\tilde{A}_{21} + c_3\tilde{A}_{31} + c_4\tilde{A}_{41} \end{aligned}$$

となります．ここで余因子 $\tilde{A}_{*1}$ は元の行列 A の余因子であることに注意しましょう．さらに $A=(a_{ij})$ として，得られた式を表すと

$$a_{13}\tilde{A}_{11} + a_{23}\tilde{A}_{21} + a_{33}\tilde{A}_{31} + a_{43}\tilde{A}_{41} = 0$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{4} a_{i3}\tilde{A}_{i1} = 0$$

となります．一般的には

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij}\tilde{A}_{ik} = \begin{cases} \det(A) & (j=k) \\ 0 & (j\neq k) \end{cases}$$

が成立します．これを行ベクトルと列ベクトルの積として

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{1k} & \tilde{A}_{2k} & \tilde{A}_{3k} & \tilde{A}_{4k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ a_{4j} \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(A) & (j=k) \\ 0 & (j\neq k) \end{cases}$$

と表現できます．さらに，左側の行ベクトルと右側の列ベクトルを動かすと

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{41} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{42} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{43} \\ \tilde{A}_{14} & \tilde{A}_{24} & \tilde{A}_{34} & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となります．以上で $\tilde{A}A = \det(A) \cdot I_4$ を証明しました．

さらに $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot I_4$ を証明しましょう．$A = (a_{ij}) \in M_4(\mathbf{R})$ を

$$
A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}
$$

と表します．このとき 2 行を 4 行と同じにした行列の行列式を 2 行の余因子展開を用いて計算すると

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \\
&= -d_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} - d_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} + d_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \\
&= d_1\tilde{A}_{21} + d_2\tilde{A}_{22} + d_3\tilde{A}_{23} + d_4\tilde{A}_{24}
\end{aligned}
$$

となります．これを $A = (a_{ij})$ の表現に戻すと

$$
a_{41}\tilde{A}_{21} + a_{42}\tilde{A}_{22} + a_{43}\tilde{A}_{23} + a_{44}\tilde{A}_{24} = 0
$$

となります．一般には

$$
\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\tilde{A}_{kj} = \begin{cases} \det(A) & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}
$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{k1} \\ \tilde{A}_{k2} \\ \tilde{A}_{k3} \\ \tilde{A}_{k4} \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(A) & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

が成立します．これから $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot I_4$ が従います．以上で定理 4.15 を証明しました.

（定理 4.15 の証明終わり）

定理 4.15 から $\det(A) \neq 0$ であるとき A は正則となり，

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$$

が成立します．この公式を**クラメールの公式**と呼びます.

演習 4.24. 次の行列の逆行列をクラメールの公式で求めましょう.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

逆に n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ が正則のとき

$$1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

から $\det(A) \neq 0$ が従います.

さらに n 次正方行列 A の**正則性**の判定に関して次の定理 4.16 が成立します.

定理 4.16. **（正則性の特徴付け）**　$A \in M_n(\mathbf{R})$ に対して次の条件はすべて同値です.

(i) $\mathrm{rank}(A) = n$

(ii) A は正則行列

(iii) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ $\left(\Leftrightarrow \ker(A) = \{\vec{0}\}\right)$

(iv) $\det(A) \neq 0$

Proof. **(ii)** と **(iv)** が必要十分であることは，すでに上で示しました．また

$$\textbf{(i)} \Leftrightarrow \textbf{(ii)} \Leftrightarrow \textbf{(iii)}$$

は定理 3.8（75 ページ）で証明しました． □

演習 4.25. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -\lambda-1 & 2-\lambda \\ 1 & -2-\lambda & -1 \\ 4-\lambda & -2-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix}$ が正則でないための必要十分条件を λ について求めましょう．

演習 4.26. 行列 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の階数を a について場合分けをして求めましょう．

■連立 1 次方程式のクラメールの公式　n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ と $\vec{b} \in \mathbf{R}^n$ が定める連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{4.45}$$

を行列式を用いて解くことを考えましょう．すでに $n = 2$ の場合は 80 ページにおいて，$n = 3$ の場合は定理 4.5（94 ページ）で扱いました．

以下では

$$\det(A) \neq 0 \tag{4.46}$$

を仮定しましょう．このとき A には逆行列が存在して，連立 1 次方程式 (4.45) には一意的な解 $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ が存在します．この解を具体的に行列式を用いて表現します．行列式 $\det(A)$ の j 列 $\vec{a}_j$ を $\vec{b}$ で置き換えた行列式を Δ_j とします．すると

$$\vec{b} = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

から

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{j-1} & \vec{b} & \vec{a}_{j+1} & \cdots & \vec{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{j-1} & x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n & \vec{a}_{j+1} & \cdots & \vec{a}_n \end{vmatrix} \\ &= x_j \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{j-1} & \vec{a}_j & \vec{a}_{j+1} & \cdots & \vec{a}_n \end{vmatrix} = x_j \cdot |A| \end{aligned}$$

から

$$x_j = \frac{\Delta_j}{|A|} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

が導かれます．

演習 4.27. 次の連立 1 次方程式を解きましょう． $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

第 5 章

部分空間とその次元

5.1　部分空間

5.1.1　具体例と定義

　部分空間については 20 ページの 1.7 節で 2 次元の場合について説明しました．一般的な定義を説明する前に，まず具体例を紹介します．

例 5.1. *3* 次元空間 $\mathbf{R}^3$ の部分集合を

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;\ x + y + z = 0 \right\}$$

と定義します．この V_1 に対して，原点を通りベクトル $\vec{a} = {}^t(1\ 1\ 1)$ に垂直な平面をイメージします．このとき

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V_1$$

とすると，$\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V_1$$

が成立します．実際

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 \end{pmatrix}$$

から

$$(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda(x_1 + y_1 + z_1) + \mu(x_2 + y_2 + z_2) = 0$$

が成立します．ここでの計算は $V_1 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{x}, \vec{a}) = 0\}$ と考えると演習 *1.18* で示したことに他なりません．

例 5.2. 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ の部分集合を

$$V_2 = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbf{R} \right\}$$

と定めます．このとき $\vec{a}_1 = s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = s_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_2$ とするとき，$\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lambda \cdot \vec{a}_1 + \mu \cdot \vec{a}_2 \in V_2$$

が成立します．

例 5.3. 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

に対して，$\mathbf{R}^4$ の中に *64* ページで考えた A の核（解空間）

$$V_3 = \ker(A) = \left\{ \vec{v} \in \mathbf{R}^4;\ A\vec{v} = \vec{0} \right\}$$

を考えます．このとき

$$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 \in V_3, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V_3$$

が成立します．実際 $A(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) = \lambda A\vec{v}_1 + \mu A\vec{v}_2 = \vec{0}$ から分かります．さらに

$$V_4 = \left\{ A\vec{w};\ \vec{w} \in \mathbf{R}^4 \right\}$$

と定めます．このとき

$$\lambda, \mu \in \mathbf{R},\ \vec{v}_1 = A\vec{w}_1,\ \vec{v}_2 = A\vec{w}_2 \in \mathrm{Im}(A) \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V_4$$

が成立します．実際

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 = \lambda A\vec{w}_1 + \mu A\vec{w}_2 = A(\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2)$$

から，このことは従います．

以上の例を念頭に次の定義 5.1 を与えます．

定義 5.1.（**部分空間**）$\mathbf{R}^n$ の部分集合 V が任意の $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$ と $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 \in V$ に対して

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V$$

が成立するとき**部分空間**と呼びます．

例 5.3 の V_3 および V_4 に相当する部分空間の例を一般化しましょう．$m \times n$ 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ を考えます．このとき (2.2)（32 ページ）で考えたように，写像

$$\Phi_A:\ \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m \quad \vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x}$$

が定まります．このとき

$$\mathrm{Im}(A) = \{A\vec{x};\ \vec{x} \in \mathbf{R}^n\}$$

を，A の**像** (*image*) と呼びます．さらに

$$\ker(A) = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n;\ A\vec{x} = \vec{0}\}$$

を，A の**核** (*kernel*) または**解空間** と呼びます．$\mathrm{Im}(A)$ は Φ_A の値域である $\mathbf{R}^m$ の部分空間，$\ker(A)$ は Φ_A の定義域である $\mathbf{R}^n$ の部分空間となります．

部分空間を定義するには行列の核または像として表現するのが基本的な方法です．核として表すのは，部分空間に属するベクトルを斉次の連立 1 次方程式によって条件付けることに相当します．また $A = (\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_k)$ の像 $\mathrm{Im}(A)$ として表すのは，部分空間に中のベクトルを $\vec{a}_1,\ \cdots,\ \vec{a}_k$ のスカラー倍の和として表現することになります．

演習 5.1. V と W を $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします．このとき $V \cap W$ と

$$V + W := \{\vec{v} + \vec{w};\ \vec{v} \in V,\ \vec{w} \in W\}$$

$$V^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n;\ (\vec{x}, \vec{v}) = 0\ (\text{すべての}\vec{v} \in V)\}$$

が $\mathbf{R}^n$ の部分空間であることを示しましょう（$V^{\perp}$ を V の**直交補空間**と呼びます）．

5.1.2　部分空間の生成・線型独立

さらに議論を深めるために，次の定義 5.2 を与えます．

定義 5.2. **（部分空間の生成）(i)** ベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ があるとします．$\vec{w}$ が $c_1, \cdots, c_k \in \mathbf{R}$ を用いて

$$\vec{w} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_k\vec{x}_k \tag{5.2}$$

と書けるとき $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k$ の**線型結合**であるといいます．
(ii) $\mathbf{R}^n$ の部分空間 V の任意のベクトルが $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$，$\cdots, \vec{x}_k \in V$ の線型結合であるとき，すなわち

$$V = \{\vec{w} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_k\vec{x}_k;\ c_j \in \mathbf{R}\ (j = 1, \cdots, k)\}$$

であるとき，V は $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$，$\cdots, \vec{x}_k$ で**張られる**，あるいは**生成される**といいます．このとき $V = \mathbf{R}\vec{x}_1 + \cdots + \mathbf{R}\vec{x}_k$ または $V = L(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k)$ と記します．

定義 5.2 の (5.2) において $X = (\vec{x}_1\ \cdots\ \vec{x}_k)$ と定義すると

$$\begin{aligned}\vec{w}\text{が}\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k\text{の線型結合である} &\Leftrightarrow \text{ある}\vec{c} \in \mathbf{R}^k\text{に対して}\vec{w} = X\vec{c}\\ &\Leftrightarrow \vec{w} \in \mathrm{Im}(X) \Leftrightarrow \mathrm{rank}(X) = \mathrm{rank}(X|\vec{w})\end{aligned}$$

が成立することに注意しましょう．

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix},\quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}2\\-7\\-5\end{pmatrix},\quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad \vec{w} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

とすると

$$(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|\vec{w}) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

と行基本変形されますから $\vec{w}$ は $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ の線型結合にはなりません．

演習 5.2. $\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\0\\c\end{pmatrix}$ が $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}6\\6\\8\end{pmatrix}$ の線型結合となる必要十分条件を求めましょう．

例 5.1 の V_1 において，$\vec{v} = {}^t(x\ y\ z) \in V_1$ とすると，$x+y+z=0$ が成立しますから

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

と V_1 が $\vec{v}_1 = {}^t(-1\ 1\ 0)$ と $\vec{v}_2 = {}^t(-1\ 0\ 1)$ で生成されます．さらに任意の $\vec{v} \in V_1$ に対して

$$\vec{v} = y\vec{v}_1 + z\vec{v}_2 = y'\vec{v}_1 + z'\vec{v}_2$$

と 2 通りに表示されたとすると

$$\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y'-z' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

から $y = y'$ と $z = z'$ が従います．このように V_1 のベクトルは $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ の線型結合として**一意的に**表示されます（このことをもって $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ が V_1 の**基底**であるといいます）.

この例を念頭において，次の定義 5.3 を与えます.

定義 5.3. **（線型独立，線型従属）**
(i) ベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ が**線型独立（1 次独立）**であるとは,

$$c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

が成立するときです.
(ii) ベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ が**線型従属**であるとは，線型独立でないとき，すなわち

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_k\vec{x}_k = \vec{0}$$

を満たす $c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbf{R}$ が存在して，ある j に対して $c_j \neq 0$ が成立するときです．このとき $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\cdots$, $\vec{x}_k$ には，**非自明な線型関係**があるといいます.

(5.3) にある $\vec{v}_1 = {}^t(-1\ 1\ 0)$ と $\vec{v}_2 = {}^t(-1\ 0\ 1)$ は線型独立です．実際

$$c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $c_1 = c_2 = 0$ が従います.

上の定義 5.3 において $k=2$ とします．すなわち 2 本のベクトル $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2 \in \mathbf{R}^n$ を考えます。14 ページで考えたベクトルの平行の定義を思い出すと

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \text{が線型独立} \Leftrightarrow \vec{x}_1 \nparallel \vec{x}_2$$

であることが分かります。また $k=1$ のときは

$$\vec{x}_1 \text{が線型独立} \Leftrightarrow \vec{x}_1 \neq \vec{0}$$

となります（演習 5.3 参照)。

演習 5.3. $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{x} \neq \vec{0}$ を満たすとします．このとき $\vec{x}$ が線型独立であることを示しましょう．

上の定義 5.3 において $X = (\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_k)$ と $n \times k$ 行列を定めるとき

$$X\vec{c} = c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k$$

から

$$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \text{は線型独立} \Leftrightarrow \left(X\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0}\right) \Leftrightarrow \mathrm{rank}(X) = k$$

$$\begin{aligned}\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \text{は線型従属} &\Leftrightarrow \left(\text{ある}\vec{c} \in \mathbf{R}^k \text{に対して} X\vec{c} = \vec{0} \text{かつ} \vec{c} \neq \vec{0}\right) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rank}(X) < k\end{aligned}$$

が成立することに注意しましょう．ここで行列 X の階数に関して 74 ページの定理 3.7 を用いました．

さらに $n < k$ のとき $\mathrm{rank}(X) < k$ が必ず成立しますから

$$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k$$

は線型従属となることに注意しましょう（定理 5.3 で同じことを取り上げます)．

上で述べた，生成，線型独立性の概念を深めるために，さらに実例を考えます．(5.3) の行列 A に対して，その核 $\ker(A)$ について考えます．$\vec{v} = {}^t(v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4) \in \ker(A)$ とすると，$A\vec{v} = \vec{0}$ がその条件です．この連立 1 次方程式は行列 A が

$$A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4) \longrightarrow \cdots \longrightarrow B = \left(\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形されることから

$$\begin{cases} v_1 & & -v_3 & & = & 0 \\ & v_2 & -2v_3 & & = & 0 \\ & & & v_4 & = & 0 \end{cases}$$

と必要十分です．ここでピボットのない変数 v_3 に関して $v_3 = \alpha$ とすると ${}^t(v_1\ v_2\ v_3\ v_4) = (\alpha\ 2\alpha\ \alpha\ 0)$ となります．このことから $\vec{v} \in \ker(A)$ とすると

$$\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と ${}^t(1\ 2\ 1\ 0)$ で生成されます．

次に $\mathrm{Im}(A)$ について考えます．$\vec{v} = A\vec{w} \in \mathrm{Im}(A)$ で $\vec{w} = {}^t(w_1\ w_2\ w_3\ w_4)$ のとき

$$\vec{v} = w_1\vec{a}_1 + w_2\vec{a}_2 + w_3\vec{a}_3 + w_4\vec{a}_4$$

と A の列ベクトル 4 本で張られていることが分かります．実は，次のように考えると，$\mathrm{Im}(A)$ を生成するのに 3 本で十分であることが分かります．A の行基本変形の計算から，有限個の基本行列 $P_1, P_2, \cdots, P_\ell$ が存在して

$$P_\ell P_{\ell-1} \cdots P_1 A = B$$

が成立します．ここで，$P = P_\ell P_{\ell-1} \cdots P_1$ と置くと，

$$P\vec{a}_j = \vec{b}_j \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

となります．ここで B の具体的な形から

$$\vec{b}_3 = -\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2$$

であることが分かります．この式に P の正則性を考慮して P^{-1} を掛けると，

$$\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2$$

を得ます．したがって $\mathrm{Im}(A)$ の元 $\vec{v} = \sum_{i=1}^4 w_i\vec{a}_i$ は

$$\begin{aligned} \vec{v} &= w_1\vec{a}_1 + w_2\vec{a}_2 + w_3\vec{a}_3 + w_4\vec{a}_4 \\ &= w_1\vec{a}_1 + w_2\vec{a}_2 + w_3(-\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2) + w_4\vec{a}_4 \\ &= (w_1 - w_3)\vec{a}_1 + (w_2 - 2w_3)\vec{a}_2 + w_4\vec{a}_4 \end{aligned}$$

と，$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_4$ と 3 本のベクトルで張られます．他方，$\vec{b}_1$，$\vec{b}_2$，$\vec{b}_4$ が線型独立であることが次のように示されます．

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_4\vec{a}_4 = \vec{0}$$

を仮定すると，この式に P を掛けて

$$c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_4\vec{b}_4 = \vec{0}$$

から $c_1 = c_2 = c_4 = 0$ が導かれます．よって $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_4$ は線型独立です（演習 5.4 参照)．

　まとめると，

(i) $\mathrm{Im}(A)$ は，a_1，a_2，a_4 で張られ，
(ii) a_1，a_2，a_4 は線型独立である

ことが示されました．このとき $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ は線型部分空間 $\mathrm{Im}(A)$ の**基底**であるといいます．

　基底については，節を改めた 5.1.3 節でさらに詳しく解説します．

演習 5.4. $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ とします．$P \in M_n(\mathbf{R})$ が正則であるとき

$$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \text{が線型独立} \Rightarrow P\vec{x}_1, \cdots, P\vec{x}_k \text{が線型独立}$$

を示しましょう．

演習 5.5. $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ が線型独立であるとします．また $Q \in M_k(\mathbf{R})$ が正則であるとします．このとき

$$(\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_k)Q = (\vec{y}_1 \ \cdots \ \vec{y}_k)$$

とすると $\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_k \in \mathbf{R}^n$ が線型独立であることを示しましょう．

演習 5.6. $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ が線型独立であるとします．このとき $\vec{x}_1, \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ が線型独立であることを示しましょう．

演習 5.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$ であるための a, b, c に関する条件を求めましょう．

演習 5.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ に対して $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ となる条件を行列によって $B\vec{v} = \vec{0}$ と表しましょう.

演習 5.9. 次のベクトルの組み合わせが，線型独立か線型従属か判定しましょう.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

5.1.3　部分空間の基底・次元

5.1.2 節で基底に関して具体例を用いて説明しました．復習すると (5.1) で与えた 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4)$$

に関して **(i)** $\mathrm{Im}(A)$ は $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_4$ で生成され，**(ii)** $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_4$ は線型独立です.

この例を念頭において次の定義 5.4 を与えます.

定義 5.4. V を $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間とします．このとき $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell$ が V の**基底**であるとは

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell \text{は } V \text{ を生成して,}$$

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell \text{は線型独立である}$$

ときです.

この定義 5.4 で与えた基底をなすベクトルの本数は V について一定であることを示します．具体的には次の定理 5.1 が成立します.

定理 5.1. V を $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします．V の基底が 2 組

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell \text{ と } \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_k$$

あるとします．このとき $\ell = k$ が成立します．この $\ell = k$ を V の**次元**といい $\dim(V)$ と記します．

Proof. $\vec{v}_j \in V$ ですから，基底 $\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_k$ の線型結合で

$$\vec{v}_j = (\vec{w}_1 \ \cdots \ \vec{w}_k) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

と表せます．この列ベクトルの等式を j について束ねると

$$(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_j \cdots \vec{v}_\ell) = (\vec{w}_1 \ \cdots \ \vec{w}_k) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{k\ell} \end{pmatrix}$$

が成立します．このとき右辺に現れる $k \times \ell$ 行列を B とします．ここで $k < \ell$ とすると $B\vec{c} = \vec{0}$ を満たす $\vec{c} \neq \vec{0}$ が存在します（定理 3.7 の **(iii)** ）．すると

$$(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_j \cdots \vec{v}_\ell)\vec{c} = (\vec{w}_1 \ \cdots \ \vec{w}_k)B\vec{c} = (\vec{w}_1 \ \cdots \ \vec{w}_k)\vec{0} = \vec{0}$$

となります．$\vec{c} \neq \vec{0}$ であることから $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell$ が線型従属となって基底であることに反します．よって $k \geq \ell$ であることが分かります．

逆に $\vec{w}_i$ を $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell$ で表すと $k \leq \ell$ も示せます．以上で $k = \ell$ であることを証明しました． □

ここで述べた定理 5.1 の論法を用いると次の定理 5.2 の **(i)** を導くことができます．**(ii)** は **(i)** の対偶に他なりません．

定理 5.2. $\mathbf{R}^n$ の部分空間 V が ℓ 次元であるとします．
(i) $k > \ell$ のとき $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k \in V$ は線型従属です．
(ii) $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k \in V$ が線型独立ならば $k \leq \ell$ となります．

n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ の次元は n ですから，定理 5.2 の **(ii)** から次の定理 5.3 が従います．（斉次の連立 1 次方程式の非自明解の存在に関する定理 3.7 の **(iii)** を翻訳しても次の定理 5.3 となります．）

定理 5.3. **（n 次元空間に許容される線型独立なベクトルの本数）** $\ell > n$ とします．$\mathbf{R}^n$ 中の ℓ 本のベクトル

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell$$

は線型従属となります．

演習 5.10. 次の行列 A に対して $\ker(A)$ と $\mathrm{Im}(A)$ の基底を求めましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -7 & 6 \\ 2 & 10 & -2 & -8 \end{pmatrix}$

行基本変形を用いて列ベクトルの間の線型関係を調べることができることを学びました．このことの応用として，2 つの部分空間 V と W の交わり $V \cap W$ の基底を求めることを考えましょう．具体的には次の式の中の行列 A と B に対して $V = \mathrm{Im}(A)$，$W = \mathrm{Im}(B)$ を考えます．このとき行基本変形

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & -2 & -3 & -2 & -6 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

を考えます．この計算から

$$B\vec{y} \in \mathrm{Im}(A) \Leftrightarrow y_1 + y_2 + 4y_3 = 0$$

が従います．他方，行基本変形

$$B \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から B の列ベクトルの線型関係 $\vec{b}_3 = -2\vec{b}_1 + 6\vec{b}_2$ が従います．以上から $B\vec{y} \in \mathrm{Im}(A)$ のとき

$$B\vec{y} = (-y_2 - 4y_3)\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3(-2\vec{b}_1 + 6\vec{b}_2) = (-y_2 - 6y_3)(\vec{b}_1 - \vec{b}_2) \qquad (5.4)$$

となりますから，$V \cap W$ の基底は $\vec{b}_1 - \vec{b}_2 = {}^t(1\ 0\ 0\ \ -1)$ となります．上の計算から，$V = \mathrm{Im}(A)$ の基底として $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$, $W = \mathrm{Im}(B)$ の基底として $\vec{b}_1$，$\vec{b}_2$, $V + W$ の基底として $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{b}_1$ を取ることができることも分かります．146 ページの (5.9) で，$\dim(V + W)$, $\dim V$, $\dim W$, $\dim(V \cap W)$ の関係について調べます.

演習 5.11. 上の A と B について考えます. $\vec{v} = {}^t(x\ y\ z\ w) \in \mathbf{R}^4$ に対して $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ である条件をある行列 C を用いて $C\vec{v} = \vec{0}$ と表しましょう．同様に $\vec{v} \in \mathrm{Im}(B)$ の条件を行列 D を用いて $D\vec{v} = \vec{0}$ と表わしましょう．このことから $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B)$ の基底を求めましょう．$\vec{v} \in \mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B)$ であるとき $C\vec{v} = \vec{0}$ かつ $D\vec{v} = \vec{0}$ が成立します.

$m \times n$ 行列 A の像 $\mathrm{Im}(A)$ の基底を求める別の方法を説明します．まずそのために次の定理 5.4 から始めます.

定理 5.4. $m \times n$ 行列 A があるとします．P が m 次の正則行列であり，Q が n 次の正則行列であるとき

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(AQ), \quad \ker(A) = \ker(PA)$$

が成立します.

Proof. $\vec{w} \in \mathrm{Im}(A)$ とすると，ある $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して $\vec{w} = A\vec{w}$ が成立します．このとき

$$\vec{w} = AQ \cdot (Q^{-1}\vec{x}) \in \mathrm{Im}(AQ)$$

が従います. 逆に $\vec{w} \in \mathrm{Im}(AQ)$ とします. このとき, ある $\vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して $\vec{w} = AQ\vec{y}$ が成立します．これは $\vec{w} = A(Q\vec{y})$ と考えると $\vec{w} \in \mathrm{Im}(A)$ が従います.

核 $\ker(A)$ に関しては $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow PA\vec{x} = \vec{0}$$

が P の正則性から従うので明らかです. □

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ に対して $\mathrm{Im}(A)$ を考えます．列基本変形を用いますが,

計算上なれているので ${}^tA$ を行基本変形します．すると

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

となりますから，対応する基本行列の積を転置した正則行列 Q が存在して

$$ AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{0}) $$

が成立します．このとき $\mathrm{Im}(A)$ の基底が $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ であることが従います.

注意 5.1. $m \times n$ 行列 A と B があるとします．このとき

$$ {}^tA \to \cdots \to C_0, \quad {}^tB \to \cdots \to D_0 $$

と狭義の階段行列（(3.2) 参照）に行基本変形されたとします．このとき

$$ \mathrm{Im(A)} = \mathrm{Im(B)} \Leftrightarrow C_0 = D_0 $$

が成立します．これは，(3.2) で説明した，行列に対して狭義の階段行列が一意的に定まることに他なりません.

演習 5.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}$ に対して $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$ の必要十分条件は $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ であることを証明しましょう.

演習 5.13. 次の行列 A に対して $\mathrm{Im}(A)$ の基底を求めましょう.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

5.1.4　次元定理

一般に $m \times n$ 行列 A の核と像の次元は A の階数で記述できます．すなわち次の定理 5.5 が成立します.

定理 5.5. **（次元定理）** $m \times n$ 行列 A に対して

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rank}(A), \quad \dim(\ker(A)) = n - \mathrm{rank}(A)$$

が成立します.

$\mathrm{Im}(A)$ の次元については，上の例からも理解できると思いますが，定理 3.4 を用いて証明します．すなわち m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在して

$$PAQ = (\vec{e}_1 \ \cdots \vec{e}_\ell \ \vec{0} \cdots \vec{0}) \tag{5.5}$$

が成立することが分かります ($\ell = \mathrm{rank}(A)$)．このとき Q が正則であることから，$\vec{w} \in \mathbf{R}^m$ に対して

$$\vec{w} \in \mathrm{Im}(A) \Leftrightarrow \vec{w} \in \mathrm{Im}(AQ)$$

が成立します（定理 5.4 参照)．このことから $\vec{w} \in \mathrm{Im}(A)$ に対して，ある $\vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が存在して $\vec{w} = AQ\vec{y}$ が成立します．この両辺に P を掛けると

$$P\vec{w} = PAQ\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_\ell\vec{e}_\ell$$

が成立し，さらに

$$\vec{w} = y_1P^{-1}\vec{e}_1 + \cdots + y_\ell P^{-1}\vec{e}_\ell$$

が従います．よって $\mathrm{Im}(A)$ は $P^{-1}\vec{e}_1, \cdots, P^{-1}\vec{e}_\ell$ で生成されることが分かります．このことに加えて $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_\ell$ は線型独立で，P^{-1} が正則ですから，$P^{-1}\vec{e}_1, \cdots, P^{-1}\vec{e}_\ell$ は線型独立になります（演習 5.4)．以上から

A の基底は $P^{-1}\vec{e}_1, \cdots, P^{-1}\vec{e}_\ell$ であること，従って $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rank}(A)$

が分かりました．さらに $\ker(A)$ の次元については

$$A\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} \in \mathbf{R}Q^{-1}\vec{e}_{\ell+1} + \cdots + \mathbf{R}Q^{-1}\vec{e}_n$$

であることが分かります．さらに $Q^{-1}\vec{e}_{\ell+1}, \cdots, Q^{-1}\vec{e}_n$ は線型独立ですから，

$Q^{-1}\vec{e}_{\ell+1}, \cdots, Q^{-1}\vec{e}_n$ が $\ker(A)$ の基底で，$\dim(\ker(A)) = n - \ell$

であることが分かりました.

（定理 5.5 の証明おわり）

注意 5.2. 注意 *3.1* で，斉次の連立 1 次方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ の解は $n-\mathrm{rank}(A)$ 個のパラメータで記述できることを紹介しました．このパラメータの数が $\ker(A)$ の次元に他ならないことに注意しましょう．

■線型写像の全射・単射 22 ページで写像の単射と全射について定義しました．A を $m\times n$ 行列とするとき A が定める線型写像

$$\Phi_A:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$$

がどの条件の下で単射あるいは全射になるかを考えましょう．これは，次元定理（定理 5.5）の応用にあたります．

$$\begin{aligned}\Phi_A\text{が全射} &\Leftrightarrow \text{任意の}\vec{v}\in\mathbf{R}^m\text{に対して}A\vec{x}=\vec{v}\text{を満たす}\vec{x}\in\mathbf{R}^n\text{が存在}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(A)=\mathbf{R}^m\Leftrightarrow\mathrm{rank}(A)=m\end{aligned}$$

が分かります．次に単射性ですが

$$A\vec{x}=A\vec{y}\Leftrightarrow A(\vec{x}-\vec{y})=\vec{0}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}\Phi_A\text{が単射} &\Leftrightarrow (A\vec{x}=A\vec{y}\Rightarrow\vec{x}=\vec{y})\\ &\Leftrightarrow \left(A\vec{x}=\vec{0}\Rightarrow\vec{x}=\vec{0}\right)\Leftrightarrow\ker(A)=\{\vec{0}\}\Leftrightarrow\mathrm{rank}(A)=n\end{aligned}$$

が分かります．

特に $m=n$ のとき，すなわち A が正方行列のとき

$$\Phi_A\text{が全射}\Leftrightarrow\Phi_A\text{が単射}$$

であることが分かります．

5.1.5 基底の存在

線型部分空間の基底については次の定理 5.6 が成立します．

定理 5.6. **（基底の延長）**V を $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間とします．V に線型独立な

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell \in V$$

があるとします．このとき，これらのベクトルを用いた V の基底

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell, \cdots, \vec{v}_k$$

が存在します（ここで $\ell = 0$ あるいは $k = \ell$ となることもあります）．

Proof. まず $V = V_\ell = \mathbf{R}\vec{v}_1 + \cdots + \mathbf{R}\vec{v}_\ell$ ならば

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell$$

が V の基底です．$V_\ell \subsetneqq V$ ならば $\vec{v}_{\ell+1} \in V$ で $\vec{v}_{\ell+1} \notin V_\ell$ であるものが存在します．このとき

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}$$

は線型独立です．実際，次のように示すことができます．

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_\ell\vec{v}_\ell + c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} = \vec{0}$$

とします．このとき $c_{\ell+1} \neq 0$ とすると

$$v_{\ell+1} = -\frac{1}{c_{\ell+1}}(c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_\ell\vec{v}_\ell) \in V_\ell$$

となり $\vec{v}_{\ell+1} \notin V_\ell$ に矛盾します．したがって $c_{\ell+1} = 0$ となります．これから $c_1 = \cdots = c_\ell = 0$ が従います．ここで $V = V_{\ell+1} = \mathbf{R}\vec{v}_1 + \cdots + \mathbf{R}\vec{v}_\ell + \mathbf{R}\vec{v}_{\ell+1}$ ならば

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}$$

が V の基底となります．$V_{\ell+1} \subsetneqq V$ ならば $\vec{v}_{\ell+2} \in V,\ \notin V_{\ell+1}$ であるベクトルが存在します．このとき，同様に

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell,\ \vec{v}_{\ell+1},\ \vec{v}_{\ell+2}$$

は線型独立となります．このとき，$V = V_{\ell+2} = \mathbf{R}\vec{v}_1 + \cdots + \mathbf{R}\vec{v}_{\ell+2}$ であるならば $\vec{v}_1,\ \cdots, \vec{v}_{\ell+2}$ が基底となります．そうでなかったら，さらに V のベクトルで $V_{\ell+2}$ に入っていないベクトルを取ります．

この手続きを繰り返していくと，ある時点で線型独立な

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell, \cdots, \vec{v}_j$$

が V を張ることが分かります．そのことを示すためには，定理 5.3 を用います．実際，上の手続きで構成した

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell, \cdots, \vec{v}_j$$

は線型独立ですから $j \leqq n$ となるからです． □

定理 5.6 から部分空間の基底の存在が証明できます．すなわち $\ell = 0$ とすれば十分です．

定理 5.7. $\mathbf{R}^n$ の部分空間 V には基底が存在します．

最後に次の定理 5.8 を紹介します．

定理 5.8. V と W は $\mathbf{R}^n$ の部分空間で $V \subset W$ が成立するとします．このとき

$$\dim V = \dim W \Rightarrow V = W$$

が成立します．

V の基底を $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell$ とするとき，もし $V \neq W$ ならば $\vec{v}_{\ell+1} \in W, \notin V$ が存在します．さらに基底の延長を繰り返すと $\dim W > \dim V$ であることになります．

基底の延長に関する定理 5.6 の応用として，2 つの部分空間 V と W の和 $V + W$ および交わり $V \cap W$ の次元に関する公式を導きましょう．$V \cap W$ の基底を $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell$ とします．定理 5.6 を用いて V の基底を

$$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell, \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s \tag{5.6}$$

と取り，W の基底を

$$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell, \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_t \tag{5.7}$$

と取ることができます．このとき $V + W$ は

$$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell, \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s, \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_t \tag{5.8}$$

で生成されることは比較的容易に示すことができます．$V+W$ の定義を思い出しましょう．また，これらのベクトルは線型独立です．

$$\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\vec{a}_i+\sum_{j=1}^{s}\xi_i\vec{v}_j+\sum_{k=1}^{\ell}\eta_k\vec{w}_k=\vec{0}$$

とします．これから

$$\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\vec{a}_i+\sum_{j=1}^{s}\xi_i\vec{v}_j=-\sum_{k=1}^{t}\eta_k\vec{w}_k$$

とすると，左辺は V に属し，右辺は W に属しますから，両辺は $V\cap W$ に属します．このとき

$$\sum_{k=1}^{s}\eta_k\vec{w}_k=\sum_{i=1}^{\ell}c_i\vec{a}_i$$

と $V\cap W$ の基底で表現できます．ところが (5.7) は W の基底であることから，

$$\eta_1=\cdots=\eta_t=0,\quad c_1=\cdots=c_\ell=0$$

が従います．これから

$$\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\vec{a}_i+\sum_{j=1}^{s}\xi_i\vec{v}_j=\vec{0}$$

となりますが，これも (5.7) が V の基底であることから

$$\alpha_1=\cdots=\alpha_\ell=\xi_1=\cdots=\xi_s=0$$

が分かります．これから $V+W$ の基底が (5.8) で与えられることが分かりました．

以上で

$$\dim(V+w)=\dim V+\dim W-\dim(V\cap W) \tag{5.9}$$

を示しました．この公式の具体例は 139 ページに与えられています．

5.2 直交補空間

5.2.1 転置行列の階数

$m \times n$ 行列 A について考えます．このとき定理 3.4 から m 次の正則行列 P と n 次の正則行列 Q が存在して

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_\ell & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

が成立します．ここで $\ell = \mathrm{rank}(A)$ ですが，さらにこの両辺を転置すると

$$ {}^tQ \cdot {}^tA \cdot {}^tP = \left(\begin{array}{c|c} I_\ell & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{5.10}$$

が従います．このとき ${}^tP$ と ${}^tQ$ が正則であることに注意しましょう（(2.20) 参照）．ここで次元定理（定理 5.5）とその証明から

$$\mathrm{rank}({}^tA) = \dim(\mathrm{Im}({}^tA)) = \ell = \mathrm{rank}(A)$$

を得ます．以上で次の定理 5.9 を示しました．

定理 5.9. $m \times n$ 行列 A に対して

$$\mathrm{rank}({}^tA) = \mathrm{rank}(A)$$

が成立します．

この定理 5.9 ですが，定理 3.5 で示したように標準形の 1 の個数が一定で階数に等しいことを用いると，次元定理（定理 5.5）とその証明を用いなくても (5.10) から直接従います．定理 5.9 の意味について説明します．$\mathbf{R}^n$ の中に，A の**行空間**として A の行ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ を転置して生成させた部分空間

$$\mathrm{Im}({}^tA) = \{c_1{}^t\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m{}^t\boldsymbol{a}_m \in \mathbf{R}^n;\ c_1, \cdots, c_m \in \mathbf{R}\}$$

を定めると，この次元が $\mathrm{Im}(A)$ の次元と一致することを定理 5.9 から導けます．言い換えると

$$A\text{の線型独立な列数の最大数} = A\text{の線型独立な行数の最大数}$$

が成立します．

5.2.2 直交補空間

演習 5.1 において**直交補空間**を定義しました．$\mathbf{R}^n$ の部分空間 V に対してその直交補空間を

$$V^\perp = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n;\ (\vec{x}, \vec{v}) = 0 \quad (\text{すべての } \vec{v} \in V)\}$$

で定義します．

直交補空間 $V^\perp$ の次元などについて詳しく調べていきますが，最初に V が行列 A の像の場合について考えます．すなわち A を $m \times n$ 行列として，$V = \mathrm{Im}(A)$ の場合を考えます．このとき

$$\begin{aligned}\vec{w} \in V^\perp &\Leftrightarrow (\vec{w}, A\vec{x}) = 0 \quad (\text{すべての } \vec{x} \in \mathbf{R}^n) \\ &\Leftrightarrow ({}^t A\vec{w}, \vec{x}) = 0 \quad (\text{すべての } \vec{x} \in \mathbf{R}^n) \Leftrightarrow {}^t A\vec{w} = \vec{0}\end{aligned}$$

から

$$\boxed{(\mathrm{Im}(A))^\perp = \ker({}^t A) \qquad (5.11)}$$

が従います．上で $\vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(\vec{y}, \vec{x}) = 0 \quad (\text{すべての } \vec{x} \in \mathbf{R}^n) \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0}$$

であることを用いました（演習 1.10 参照）．また内積と転置行列を関係付ける (2.21) も用いました．

具体例について考えます．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)$$

に対して $V = \mathrm{Im}(A)$ を考えます．ここで $\vec{w} \in V^\perp$ の必要十分条件は

$$(\vec{w}, \vec{a}_1) = (\vec{w}, \vec{a}_2) = 0$$

ですが，${}^t A\vec{w} = \vec{0}$ も同じく必要十分条件になります．行基本変形

$${}^t A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

から $V^\perp = \ker({}^t A)$ の基底が ${}^t(-2\ 3\ 1\ 0)$，${}^t(0\ \ -1\ 0\ 1)$ であることが分かります．

演習 5.14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して $(\mathrm{Im}(A))^{\perp}$ の基底を求めましょう.

さらに $\mathbf{R}^n$ の部分空間 V を一般に考えます．その基底を $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell$ とするとき, $A = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_\ell)$ と $n \times \ell$ 行列を定めると

$$V = \mathrm{Im}(A)$$

が従います．このとき $V^{\perp} = \ker({}^tA)$ の次元は，次元定理（定理 5.5）と ${}^tA$ の階数に関する定理 5.9 を用いると

$$\dim(V^{\perp}) = \dim(\ker({}^tA)) = n - \mathrm{rank}({}^tA) = n - \mathrm{rank}(A) = n - \dim V$$

をとなります．以上で次の定理 5.10 を得ました.

定理 5.10. $\mathbf{R}^n$ の部分空間 V に対して

$$\dim V^{\perp} = n - \dim V \tag{5.12}$$

が成立します.

最後に直交補空間の直交補空間に関する次の定理 5.11 を紹介しましょう.

定理 5.11. $\mathbf{R}^n$ の部分空間 V に対して

$$\left(V^{\perp}\right)^{\perp} = V$$

が成立します.

Proof. まず $V \subset \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$ を示します．そのために $\vec{v} \in V$ を取ります．このとき $\vec{w} \in V^{\perp}$ を任意に取ると

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

が成立します．これは $\vec{v} \in \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$ を意味します.

さらに

$$\dim \left(V^{\perp}\right)^{\perp} = n - \dim(V^{\perp}) = n - (n - \dim V) = \dim V$$

となり，定理 5.8 を適用すると $\left(V^{\perp}\right)^{\perp} = V$ が従います. □

$m \times n$ 行列 A に対して ${}^t\left({}^tA\right) = A$ ですから (5.11) から

$$\ker(A) = (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$$

が成立します．これに定理 5.11 を適用すると

$$(\ker(A))^{\perp} = \mathrm{Im}({}^tA) \tag{5.13}$$

が従います．

5.2.3　直交補空間の性質

最後に直交補空間の性質について考えましょう．

定理 5.12. E と F を $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします．
(i) $E \subset F$ ならば $E^{\perp} \supset F^{\perp}$
(ii) $(E+F)^{\perp} = E^{\perp} \cap F^{\perp}$,　$(E \cap F)^{\perp} = E^{\perp} + F^{\perp}$

Proof. **(i)** $\vec{v} \in F^{\perp}$ とします．$\vec{e} \in E$ とすると $\vec{e} \in F$ ですから $(\vec{v}, \vec{e}) = 0$ となります．これから $\vec{v} \in E^{\perp}$ が分かります．
(ii) $E \subset E+F$ と $F \subset E+F$ から $(E+F)^{\perp} \subset E^{\perp}$, $(E+F)^{\perp} \subset F^{\perp}$ となり $(E+F)^{\perp} \subset E^{\perp} \cap F^{\perp}$ を得ます．

逆に $\vec{v} \in E^{\perp} \cap F^{\perp}$ としましょう．このとき $\vec{w} = \vec{e} + \vec{f} \in E+F$ を $\vec{e} \in E$, $\vec{f} \in F$ を満たすように取ると，$(\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{e}, \vec{v}) + (\vec{f}, \vec{f}) = 0$ から $\vec{v} \in (E+F)^{\perp}$ となります．これから $(E+F)^{\perp} \supset E^{\perp} \cap F^{\perp}$ を得ます．

$\left(E^{\perp}\right)^{\perp} = E$, $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$ から $\left(E^{\perp} + F^{\perp}\right)^{\perp} = E \cap F$ を得ます．この両辺の直交補空間を取ると $E^{\perp} + F^{\perp} = (E \cap F)^{\perp}$ となります．　□

5.3　小行列式と階数

A を $m \times n$ 行列とします．$k \leqq m, n$ を満たす k に対して A の k 次**小行列**とは

$$1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq m, \quad 1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqq n$$

を満たす k 個の行 $i_1,\ \cdots, i_k$ 行と k 個の列 $j_1,\ \cdots, j_k$ 列を抜き出した

$$A_0 = A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

のことです．この A について

$$\operatorname{rank}(A) = d$$

が成立するとします．この $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$ の n 本の列ベクトルのうち $k > d$ である k 本の列ベクトル

$$\vec{a}_{j_1}, \cdots, \vec{a}_{j_k} \quad (j_1 < j_2 < \cdots < j_k)$$

は線型従属となります．実際，この k 本のベクトルが線型独立とすると定理 5.6 によって

$$\dim \operatorname{Im}(A) \geqq k > d = \operatorname{rank}(A)$$

となり次元定理（定理 5.5）に反するからです（定理 5.2 も参照）．この k 本のベクトルの線型従属性から

$$\det(A_0) = \det\left(A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right) = 0$$

となります．実際，この行列式が 0 でないと

$$c_1\vec{a}_{j_1} + \cdots + c_k\vec{a}_{j_k} = \vec{0} \Rightarrow A_0\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_k = 0$$

から $\vec{a}_{j_1}, \cdots, \vec{a}_{j_k}$ が線型独立になってしまいます．

次に $\operatorname{Im}(A)$ の基底である $\vec{a}_{j_1},\ \cdots,\ \vec{a}_{j_d}$ を取ります．このとき

$$A' = (\vec{a}_{j_1}\ \cdots\ \vec{a}_{j_d}), \quad {}^tA' = (\vec{\alpha}_1\ \cdots\ \vec{\alpha}_m)$$

とすると $\operatorname{rank}({}^tA') = \operatorname{rank}(A') = d$ ですから ${}^tA'$ の d 本の列ベクトル $\vec{\alpha}_{i_1},\ \cdots,\ \vec{\alpha}_{i_d}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_d)$ が線型独立になります．したがって $\det(\vec{\alpha}_{i_1}\ \cdots\ \vec{\alpha}_{i_d}) \neq 0$ となります．ここで

$$A'' = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha}_{i_1} \\ \vdots \\ {}^t\vec{\alpha}_{i_d} \end{pmatrix}$$

とすると A'' は A の d 次の小行列で $\det(A'') \neq 0$ が成立します．

以上で次の定理 5.13 を証明しました．

定理 5.13. A を $m \times n$ 行列とします．$d = \mathrm{rank}(A)$ であるとします．
(i) $k > d$ であるとき，A の任意の k 次小行列 A'' に対して

$$\det(A'') = 0$$

が成立します．
(ii) A のある d 次小行列 A'' に対して

$$\det(A'') \neq 0$$

が成立します．

定理 5.13 の連立 1 次方程式への応用を紹介します．A を $m \times n$ 行列，$\vec{b} \in \mathbf{R}^m$ のときに連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{5.14}$$

を考えましょう．そして $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|\vec{b}) = d$ とします．このとき定理 3.3 によって方程式 (5.14) に解が存在することが分かります．ここで拡大行列 $(A|\vec{b})$ の線型独立な d 行を選び

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a}_{i_1} & b_{i_1} \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i_d} & b_{i_d} \end{array}\right) = \left(\vec{\alpha}_1 \ \cdots \ \vec{\alpha}_n | \vec{\beta}\right)$$

と d 次の列ベクトル $\vec{\alpha}_1$，$\cdots$，$\vec{\alpha}_n$，$\vec{\beta} \in \mathbf{R}^m$ を定めます．このとき連立 1 次方程式 (5.14) とここで定めた拡大行列が表す方程式は必要十分になります．実際，元の拡大行列 $(A|\vec{b})$ で選ばなかった行は，$(\boldsymbol{a}_{i_1}|b_{i_1}), \cdots, (\boldsymbol{a}_{i_d}|b_{i_d})$ の線型結合で表されるからです．

さらに d 本の線型独立な $\vec{\alpha}_{j_1}, \cdots, \vec{\alpha}_{j_d}$ を選びます（具体的には，A に対して行列式の消えない d 次の小行列を選んだときの列を選びます）．そして残りの $n-d$ 本の列ベクトルを $\vec{\alpha}_{k_1}, \cdots, \vec{\alpha}_{k_{n-d}}$ とします．このとき元の連立 1 次方程式 (5.14) は，$A'' = (\vec{\alpha}_{j_1} \ \cdots \ \vec{\alpha}_{j_d})$ とすると

$$A'' \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_d} \end{pmatrix} = -\left(\vec{\alpha}_{k_1} \ \cdots \ \vec{\alpha}_{k_{n-d}}\right) \begin{pmatrix} x_{k_1} \\ \vdots \\ x_{k_{n-d}} \end{pmatrix} + \vec{\beta}$$

と表され，解は

$$\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_d} \end{pmatrix} = -\left(A''\right)^{-1}\left(\vec{\alpha}_{k_1}\ \cdots\ \vec{\alpha}_{k_{n-d}}\right)\begin{pmatrix} x_{k_1} \\ \vdots \\ x_{k_{n-d}} \end{pmatrix} + \left(A''\right)^{-1}\vec{\beta}$$

と表示されます.

演習 5.15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 10 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = {}^t(3\ 8\ 11)$ とするとき連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ を上で説明した解法によって解きましょう.

5.4　最小自乗法

右の表にある 3 つの変量 x と y と z があるとします. **??**ページで説明したように，例えば変量 x に対して

x	y	z
x_1	y_1	z_1
x_2	y_2	z_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	z_n

$$\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix}$$

と定めます. このデータを説明するモデルを

$$z = ax + by + c$$

と定数 a, b, c を用いて記述します. 左辺の変数 z のことを**目的変数**，右辺の変数 x と y のことを**説明変数**と呼びます. このモデルの実測値である左辺と理論値である右辺の差を δ とします. この誤差である δ に対して

$$\bar{\delta} = 0,\ V(\delta)\text{が最小である}$$

という条件を課して定数 a, b, c を定めます. $\bar{\delta} = 0$ から

$$c = \bar{z} - a\bar{x} - b\bar{y}$$

が従います. これから

$$\delta = (z - \bar{z}) - a(x - \bar{x}) - b(y - \bar{y})$$

を得ます．この δ に対応するベクトルは $A=(\vec{x}\ \vec{y})$ を用いた表示

$$\vec{z}-a\vec{x}-b\vec{y}=\vec{z}-A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

を持つので

$$V(\delta)=||\vec{z}-A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}||^2$$

と表示されます．ここで簡単のために $\vec{\beta}={}^t(a\ b)$ と定めます．そして $\vec{\beta}\in\mathbf{R}^2$ が

$$\vec{z}-A\vec{\beta}\perp \mathrm{Im}A \tag{5.15}$$

を満たすとします．すると任意の $\vec{\alpha}\in\mathbf{R}^2$ に対して

$$||\vec{z}-A\vec{\alpha}||^2=||\vec{z}-A\vec{\beta}+A(\vec{\beta}-\vec{\alpha})||^2=||\vec{z}-A\vec{\beta}||^2+||A(\vec{\beta}-\vec{\alpha})||^2\geqq||\vec{z}-A\vec{\beta}||^2$$

が従います[*1]．このことから (5.15) を満たす $\vec{\beta}$ によって，$V(z)$ の最小値が実現されることが分かります．さらに (5.15) を満たす $\vec{\beta}$ を求めましょう．(5.15) は

$$(\vec{z}-A\vec{\beta},A\vec{\alpha})=0\quad(\text{すべての}\vec{\alpha}\in\mathbf{R}^2) \tag{5.16}$$

を満たすことと必要十分です．この左辺が $(\vec{z}-A\vec{\beta},A\vec{\alpha})=({}^tA\vec{z}-{}^tAA\vec{\beta},\vec{\alpha})$ と計算されることから条件 (5.16) は

$${}^tA\vec{z}-{}^tAA\vec{\beta}=\vec{0}\quad\text{すなわち}\quad{}^tAA\vec{\beta}={}^tA\vec{z}$$

と同値です[*2]（この方程式のことを**重回帰分析**の**正規方程式**と呼びます）．ここで ${}^tAA$ は x と y の分散行列

$${}^tAA=\begin{pmatrix} V(x) & \mathrm{Cov}(x,y) \\ \mathrm{Cov}(y,x) & V(y) \end{pmatrix}$$

となります．分散行列が正則であるとき

$$\vec{\beta}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\left({}^tAA\right)^{-1}{}^tA\vec{z}$$

と計算されます．

[*1] ここで $\vec{p}\perp\vec{q}$ ならば $||\vec{p}+\vec{q}||^2=||\vec{p}||^2+||\vec{q}||^2$ が成立することを用いています．

[*2] ここで $(\vec{p},\vec{q})=0$ (すべての$\vec{q}$) $\Leftrightarrow\vec{p}=\vec{0}$ であることを用いました．

一般に $m \times n$ 行列 A と $\vec{z} \in \mathbf{R}^m$ に対して $||A\vec{\beta} - \vec{z}||^2$ を最小にする $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^n$ は

$$(A\vec{\beta} - \vec{z}) \perp \mathrm{Im}(A) \tag{5.17}$$

を満たし，これは

$${}^tAA\vec{\beta} = {}^tA\vec{z}$$

と必要十分です．A の *Gram* **行列**が正則であるとき

$$\vec{\beta} = \left({}^tAA\right)^{-1}{}^tA\vec{z}$$

となります.

具体例を紹介しましょう．$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき ${}^tAA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，${}^tA\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ から，求める $\vec{\beta}$ は

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となります.

演習 5.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して $||A\vec{\beta} - \vec{z}||^2$ を最小にする $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^2$ を求めましょう.

$m \times n$ 行列 A に対してその Gram 行列 ${}^tAA$ の正則性について調べてみます．まず

$$\ker({}^tAA) = \ker(A) \tag{5.18}$$

が成立します．実際 $\vec{v} \in \ker(a)$ ならば $A\vec{v} = \vec{0}$ から ${}^tAA\vec{v} = \vec{0}$ が従います．逆に，${}^tAA\vec{v} = \vec{0}$ とすると

$$||A\vec{v}||^2 = (A\vec{v}, A\vec{v}) = ({}^tAA\vec{v}, \vec{v}) = 0$$

から $A\vec{v} = \vec{0}$ が従います．この等式 (5.18) から

$${}^tAA\text{が正則} \Leftrightarrow \ker({}^tAA) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \ker(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n \tag{5.19}$$

であることが分かります.

5.5　Gram-Schmidt の直交化・正射影

5.4 節の (5.17) の状況を考えます．(5.17) の $A\vec{\beta}$ を $\vec{w}$ とすると

$$\vec{w} \in \mathrm{Im}(A), \quad (\vec{z} - \vec{w}) \perp \mathrm{Im}(A)$$

が成立します．この $\vec{w}$ を $\vec{z} \in \mathbf{R}^N$ の線型部分空間 $\mathrm{Im}(A)$ への**正射影**または**直交射影**と呼びます．

一般に $\mathbf{R}^n$ の部分空間 V があるとき，$\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\vec{w} \in V, \quad (\vec{v} - \vec{w}) \perp V$$

を満たす $\vec{w}$ のことを $\vec{v}$ の V への**正射影**または**直交射影**と呼びます．

具体的に $\vec{v}$ の V への正射影をどのように計算するか説明します．そのために V に特殊な基底が存在することを仮定します．すなわち

$$||\vec{p}_i|| = 1 \ (i = 1, 2, \cdots, k), \quad (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0 \ (i \neq j) \tag{5.20}$$

を満たす基底 $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_k$ が存在するとします（この基底を**正規直交基底**と呼びます．後に，その構成法を説明します）．このとき $\vec{w} \in V$ ですから $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_k\vec{p}_k \tag{5.21}$$

と $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_k$ で張ることができます．ここで $\vec{v} - \vec{w} \perp V$ ですから $(\vec{v} - \vec{w}, \vec{p}_i) = 0$ が成立します．この条件を (5.21) の表示を用いて書き換えると

$$(\vec{v} - (c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_k\vec{p}_k), \vec{p}_i) = (\vec{v}, \vec{p}_i) - \sum_{j=1}^{k} c_j(\vec{p}_j, \vec{p}_i) = (\vec{v}, \vec{p}_i) - c_i = 0$$

から $c_i = (\vec{v}, \vec{p}_i)$ を得ます．これから

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^{k} (\vec{v}, \vec{p}_j)\vec{p}_j$$

が成立することが従います．

次に，部分空間 V の基底

$$\vec{x}_1, \ \cdots, \ \vec{x}_k$$

から (5.20) を満たす V の基底を構成できることを説明します．そのために

$$V_j = \mathbf{R}\vec{x}_1 + \cdots + \mathbf{R}\vec{x}_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, k)$$

と定めます．そして V_1 の正規直交，V_2 の正規直交基底，V_3 の正規直交系と順番に構成していきます．$V_1 = \mathbf{R}\vec{x}_1$ の正規直交系は,

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{||\vec{x}_1||}\vec{x}_1$$

と定めればいいことが分かります．次に，$V_2 = \mathbf{R}\vec{x}_1 + \mathbf{R}\vec{x}_2$ の正規直交基底を $\vec{p}_1$ を用いて構成します．そのために $\vec{x}_2$ の V_1 への正射影

$$\vec{w}_2 = (\vec{x}_2, \vec{p}_1)\vec{p}_1$$

を考えます．すると $(\vec{x}_2 - \vec{w}_2) \perp \vec{p}_1$ が成立します．しかも $\vec{x}_2 - \vec{w}_2 \neq \vec{0}$ が成立します．実際 $\vec{x}_2 - \vec{w}_2 = \vec{0}$ とすると $\vec{x}_2 = \vec{w}_2 \in V_1$ となり $\vec{x}_1$ と $\vec{v}_2$ が線型独立であることに反します．そこで

$$\vec{P}_2 = \frac{1}{||\vec{x}_2 - \vec{w}_2||}(\vec{x}_2 - \vec{w}_2)$$

と定めると $\vec{p}_1$，$\vec{p}_2$ は V_2 の正規直交基底となります．

さらに $\ell < k$ として V_ℓ の正規直交基底

$$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$$

が存在するとして，$V_{\ell+1}$ の正規直交基底を構成します．そのために $\vec{x}_{\ell+1}$ の V_ℓ への正射影

$$\vec{w}_{\ell+1} = \sum_{j=1}^{\ell}(\vec{x}_{\ell+1}, \vec{p}_j)\vec{p}_j$$

を考えます．このとき $(\vec{x}_{\ell+1} - \vec{w}_{\ell+1}) \perp V_\ell$ が成立します．しかも $\vec{x}_{\ell+1} - \vec{w}_{\ell+1} \neq \vec{0}$ となります．実際 $\vec{x}_{\ell+1} - \vec{w}_{\ell+1} = \vec{0}$ とすると $\vec{x}_{\ell+1} = \vec{w}_{\ell+1} \in V_\ell$ となり

$$\vec{x}_{\ell+1} = s_1\vec{x}_1 + \cdots + s_\ell\vec{x}_\ell$$

と $\vec{x}_1$，$\cdots$，$\vec{x}_\ell$，$\vec{x}_{\ell+1}$ が線型独立であることに反するからです．ここで

$$\vec{p}_{\ell+1} = \frac{1}{||\vec{x}_{\ell+1} - \vec{w}_{\ell+1}||}(\vec{x}_{\ell+1} - \vec{w}_{\ell+1})$$

と定めれば

$$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell,\ \vec{p}_{\ell+1}$$

は $V_{\ell+1}$ の正規直交基底です．このプロセスを繰り返せば，V の正規直交基底を構成できます（以上の構成法を *Gram-Schmidt* **の直交化**と呼びます）．

以上で次の定理 5.14 を証明しました．

定理 5.14. **（正規直交基底の存在）** V を $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします．V には

$$||\vec{p}_i|| = 1 \ (i = 1, 2, \cdots, k), \quad (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0 \ (i \neq j)$$

を満たす正規直交基底が存在します．

最後に具体的な計算をしてみます．

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が張る $\mathbf{R}^3$ の部分空間 V の正規直交基底を計算してみましょう．

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{||\vec{x}_1||}\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と $\vec{x}_1$ 方向の単位ベクトル $\vec{p}_1$ を求めます．次に $\vec{x}_2$ の $\vec{p}_1$ 方向の正射影

$$\vec{w} = (\vec{x}_2, \vec{p}_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

を求めます．正射影の定義から

$$(\vec{x}_2 - \vec{w}, \vec{p}_1) = 0$$

となりますから，$\vec{x}_2 - \vec{w}$ の方向の単位ベクトル

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{||\vec{x}_2 - \vec{w}||}(\vec{x}_2 - \vec{w}) = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると $||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1$，$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$ が従います．

演習 5.17. $\vec{a} = {}^t(1\ 1\ 1\ -1)$, $\vec{b} = {}^t(1\ 0\ 2\ 1)$, $\vec{c} = {}^t(1\ 0\ 0\ 0)$ に対して *Gram-Schmidt* の直交化を用いて $L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ の正規直交基底を求めましょう．$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の順序を変えると答えは違ってきます．

解答

第 1 章

演習 1.1 (1) $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix} -6 \\ -24 \\ 44 \end{pmatrix}$ **(6)** $\begin{pmatrix} 12 \\ -36 \\ 15 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

演習 1.2 第 2 成分 $= -5$, 第 3 成分 $= 3$

演習 1.3 $\vec{x} + \vec{0} = (x_i) + (0) = (x_i + 0) = (x_i) = \vec{x}$,
$\vec{0} + \vec{x} = (0) + (x_i) = (0 + x_i) = (x_i) = \vec{x}$, $0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot (x_i) = (0 \cdot x_i) = (0) = \vec{0}$

演習 1.4 $\vec{x} = (x_i)$, $\vec{y} = (y_i)$ と表示すると $\vec{x} - \vec{y} = (x_i) - (y_i) = (x_i - y_i)$, $\vec{x} + (-\vec{y}) = (x_i) + (-y_i) = (x_i - y_i) = \vec{x} - \vec{y}$

演習 1.5 (1.8) $\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda \cdot (\mu a_i) = (\lambda\mu a_i)$, $(\lambda\mu)\vec{a} = (\lambda\mu) \cdot (a_i) = (\lambda\mu a_i)$
(1.9) $(\lambda+\mu)\vec{a} = (\lambda+\mu)(a_i) = ((\lambda+\mu)a_i)$, $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a} = (\lambda a_i)+(\mu a_i) = (\lambda a_i+\mu a_i) = ((\lambda + \mu)a_i)$
(1.10) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda(a_i+b_i) = (\lambda(a_i+b_i))$, $\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b} = (\lambda a_i)+(\lambda b_i) = (\lambda a_i+\lambda b_i) = (\lambda(a_i + b_i))$

演習 1.6 $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ **演習 1.7 (1)** $6\vec{a} - 3\vec{b}$ **(2)** $2\vec{a} + 7\vec{b}$

演習 1.8 $\vec{x} = \frac{\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}}{10}$, $\vec{y} = \frac{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}{2}$, $\vec{z} = \frac{7\vec{a}+\vec{b}-\vec{3}c}{10}$

演習 1.9 $\mathbf{b} = (b_1 \ \cdots \ b_n)$ とします. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\vec{x} = (a_1+b_1 \ \cdots \ a_n+b_n)\vec{x} = \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)x_k = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k = \mathbf{a}\vec{x} + \mathbf{b}\vec{x}$

演習 1.10 $\mathbf{a} = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ とします. このとき標準単位ベクトル $\vec{e}_j$ に対して $\vec{x} = \vec{e}_j$ とすると $\mathbf{a}\vec{e}_j = a_j = 0$ となります. これが任意の番号 j について成立しますから, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ が従います.

演習 1.11 ${}^t\vec{a} \cdot \vec{w} = x - 2y + 3z$

演習 1.12 まず $\vec{\alpha}_1,\ \cdots,\vec{\alpha}_\ell$ に対して

$$^t(\vec{\alpha}_1+\cdots+\vec{\alpha}_\ell)={}^t\vec{\alpha}_1+\cdots+{}^t\vec{\alpha}_\ell$$

が成立することに注意します．これを用いると

$$^t\left(c_1\vec{a}_1+\cdots+c_\ell\vec{a}_\ell\right)={}^t\left(c_1\vec{a}_1\right)+\cdots+{}^t\left(c_1\vec{a}_\ell\right)=c_1{}^t\vec{a}_1+\cdots+c_\ell{}^t\vec{a}_\ell$$

演習 1.13 $(\vec{a},\vec{b})=-11$, $(\vec{b},\vec{c})=10$, $(\vec{c},\vec{a})=1$, $||\vec{a}||=3\sqrt{2}$, $||\vec{b}||=\sqrt{30}$, $||\vec{c}||=\sqrt{47}$
演習 1.14（$n=2$ の場合） $A_2>0$ とします．このとき $A_1+A_2=0$ から得られる $A_1=-A_2$ の左辺は 0 以上で，右辺は負となりますから，矛盾です．よって $A_2=0$ となります．このとき，さらに $A_1+A_2=0$ から $A_1=0$ も従います．
演習 1.14 $||\vec{x}_0||=\left\|\dfrac{1}{||\vec{x}||}\vec{x}\right\|=\dfrac{1}{||\vec{x}||}\cdot||\vec{x}||=1$
（一般の場合） $A_n>0$ とします．$A_1+\cdots+A_{n-1}+A_n=0$ から従う $A_1+\cdots+A_{n-1}=-A_n$ の左辺は 0 以上で，右辺は負となりますから，矛盾が生じます．よって $A_n=0$ となります．このとき $A_1+\cdots+A_{n-1}=0$, $A_1,\cdots,A_{n-1}\geq 0$ に対して帰納法の仮定を用いると，$A_1=\cdots=A_{n-1}=0$ が従います．
演習 1.16 $||\vec{a}||^2=11$, $(\vec{a},\vec{b})=-2$, $||\vec{b}||^2=6$ に注意します．すると

$$f(t)=||\vec{a}||^2t^2-2(\vec{a},\vec{b})t+||\vec{b}||^2=11t^2+2t+6=11(t+\frac{1}{11})^2+6-\frac{1}{11}$$

から最小値は $f(\frac{1}{11})=\frac{60}{11}$ です．
演習 1.17

$$\begin{aligned}||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2&=||\vec{a}||^2+2(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})+||\vec{b}+\vec{c}||^2\\&=||\vec{a}||^2+2(\vec{a},\vec{b})+2(\vec{a},\vec{c})+||\vec{b}||^2+2(\vec{b},\vec{c})+||\vec{c}||^2\\&=||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2+||\vec{c}||^2++2(\vec{a},\vec{b})+2(\vec{b},\vec{c})+2(\vec{c},\vec{a})\end{aligned}$$

演習 1.18 仮定から $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\vec{c})=0$ が成立します．このとき $(\vec{a},\lambda\vec{b}+\mu\vec{c})=\lambda(\vec{a},\vec{b})+\mu(\vec{a},\vec{c})=0$ から $\vec{a}\perp(\lambda\vec{b}+\mu\vec{c})$ が従います．
演習 1.19 仮定は ${}^t\vec{a}\cdot\vec{x}$ がすべての $\vec{x}\in\mathbf{R}^n$ に対して成立することを意味します．演習 1.10 を用いると ${}^t\vec{a}=\mathbf{0}$ となりますから $\vec{a}=\vec{0}$ であることが従います．
演習 1.20(1) $||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}||^2=x^2||\vec{f_1}||^2+2xy(\vec{f_1},\vec{f_2})+y^2||\vec{f_2}||^2=x^2+y^2$, $||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}+zf_3||^2=x^2||\vec{f_1}||^2+y^2||\vec{f_2}||^2+z^2||\vec{f_3}||^2+2xy(\vec{f_1},\vec{f_2})+2yz(\vec{f_2},\vec{f_3})+2zx(\vec{f_3},\vec{f_1})=x^2+y^2+z^2$

(2)

$$\begin{aligned}||\vec{g}-x\vec{f_1}-y\vec{f_2}||^2 &= ||\vec{g}||^2-2(\vec{g},x\vec{f_1}+y\vec{f_2})+||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}||^2\\ &= ||\vec{g}||^2-2x(\vec{g},\vec{f_1})-2y(\vec{g},\vec{f_2})+x^2+y^2\\ ||\vec{g}-x\vec{f_1}-y\vec{f_2}-z\vec{f_3}||^2 &= ||\vec{g}||^2-2(\vec{g},x\vec{f_1}+y\vec{f_2}+z\vec{f_3})+||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}+z\vec{f_3}||^2\\ &= ||\vec{g}||^2-2x(\vec{g},\vec{f_1})-2y(\vec{g},\vec{f_2})-2z(\vec{g},\vec{f_3})+x^2+y^2+z^2\end{aligned}$$

演習 1.21 **(1)** $\mu=-8$
(2) $c_1\vec{a}+c_2\vec{b}=\vec{0}$ とします．この等式の第 1 成分と第 2 成分に着目すると

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} c_1 & + & 2c_2 & = & 0\\ -3c_1 & - & 4c_2 & = & 0\end{array}\right.$$

から $c_1=c_2=0$ が従います．
演習 1.22 $0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{0}=\vec{0}$ から $\vec{a}//\vec{0}$ が従います．
演習 1.23 ($\vec{x}\nparallel(\lambda\vec{x}+\vec{y})$ について) $c_1\vec{x}+c_2(\lambda\vec{x}+\vec{y})=\vec{0}$ とすると $(c_1+\lambda c_2)\vec{x}+c_2\vec{y}=\vec{0}$ となります．このとき $c_1+\lambda c_2=0,\ c_2=0$ から $c_1=0$ も従います．
($(\vec{x}+\vec{y})\nparallel(\vec{x}-\vec{y})$ について) $c_1(\vec{x}+\vec{y})+c_2(\vec{x}-\vec{y})=\vec{0}$ とします．このとき $(c_1+c_2)\vec{x}+(c_1-c_2)\vec{y}=\vec{0}$ から $c_1+c_2=c_1-c_2=0$ となりますが，これから $c_1=c_2=0$ が従います．
演習 1.24 **(1)** $\frac{2}{3}\vec{a}$ **(2)** $\frac{1}{2}\vec{a}$ **(3)** $-\frac{1}{4}\vec{a}$
演習 1.25 **(1)** $d_2\vec{p}-d_1\vec{q}=(c_1d_2\vec{a}+d_1d_2\vec{b})-(c_2d_1\vec{a}+d_1d_2\vec{b})=(c_1d_2-c_2d_1)\vec{a}=\Delta\vec{a}$ から $\vec{a}=\frac{1}{\Delta}(d_2\vec{p}-d_1\vec{q})$ が成立します．$\vec{b}$ についても同様です．
(2) $\vec{v}=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}\in L(\vec{p},\vec{q})$ は $L(\vec{a},\vec{b})$ が部分空間であることと $\vec{p},\vec{q}\in L(\vec{a},\vec{b})$ であることから $\vec{v}\in L(\vec{a},\vec{b})$ が従います．逆に **(1)** で示した式から $\vec{a},\ \vec{b}\in L(\vec{p},\vec{q})$ が従いますから，$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}\in L(\vec{a},\vec{b})$ であるとき $\vec{v}\in L(\vec{p},\vec{q})$ が従います．以上で $\vec{v}\in L(\vec{a},\vec{b})\Leftrightarrow\vec{v}\in L(\vec{p},\vec{q})$ が示されました．
(3)

$$x\vec{a}+y\vec{b}=x\cdot\frac{1}{\Delta}(d_2\vec{p}-d_1\vec{q})+y\cdot\frac{1}{\Delta}(-c_2\vec{p}+c_1\vec{q})=\frac{xd_2-yc_2}{\Delta}\vec{p}+\frac{-xd_1+yc_1}{\Delta}\vec{q}$$

から分かります．
演習 1.26 演習 1.24 から $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への正射影は $\vec{w}=-\frac{1}{4}\vec{a}$ であることが示されています．これから $\vec{b}-\vec{w}={}^t(\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ -\frac{3}{4}\ \frac{3}{4})$ であることが分かります．これから $\vec{p}=\frac{1}{2}(1\ 1\ 1\ -1)$, $\vec{q}=\frac{1}{2\sqrt{7}}(3\ 1\ -3\ 3)$ が $L(\vec{a},\vec{b})$ の正規直交基底として求められます．これから $\vec{v}_0=\frac{1}{14}(8\ 5\ -1\ 1)$ と求められます．

第 2 章

演習 2.1 $(2,3)$成分 $= c_2$, $(4,2)$成分 $= b_4$, 3列 $= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}$, 4行 $= \begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$

演習 2.2 (1) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 4 & 8 & -12 & 16 \\ 0 & -20 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

演習 2.3 $A+B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$, $3A-B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -7 & 9 \end{pmatrix}$

$A-2B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

演習 2.4 (3) $\alpha(\beta A) = \alpha(\beta\vec{a}_j) = (\alpha(\beta\vec{a}_j)) = ((\alpha\beta)\vec{a}_j) = (\alpha\beta)A$

(4) $(\alpha+\beta)A = ((\alpha+\beta)\vec{a}_j) = (\alpha\vec{a}_j + \beta\vec{a}_j) = (\alpha\vec{a}_j) + (\beta\vec{a}_j) = \alpha A + \beta A$

(5) $\alpha(A+B) = \alpha(\vec{a}_j + \vec{b}_j) = (\alpha(\vec{a}_j + \vec{b}_j)) = (\alpha\vec{a}_j + \alpha\vec{b}_j) = \alpha A + \alpha B$

演習 2.5 (1) $\begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} x+2y \\ 4x+3y \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} ax+\alpha y+pz \\ bx+\beta y+qz \\ cx+\gamma y+rz \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} x+2y-3z+4w \\ 4y-6z+7w \\ 3x+4y-6z+8w \end{pmatrix}$

演習 2.6 (1) $\vec{a}$ **(2)** $\vec{b}$ **(3)** $\vec{c}$ **(4)** $\vec{a}+\lambda\vec{c}$ **(5)** $\lambda\vec{b}$

演習 2.7（(2.6) について）$A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = A(\lambda\vec{x}) + A(\mu\vec{y}) = \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y}$

（(2.7) について）(2.5) にある $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$ を繰り返して用いると

$A(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_\ell\vec{x}_\ell) = A(c_1\vec{x}_1) + \cdots + A(c_\ell\vec{x}_\ell) = c_1A\vec{x}_1 + \cdots + c_\ell A\vec{x}_\ell$ と証明できます.

演習 2.8 $\mathbf{e_1}X = \mathbf{a}$, $\mathbf{e_2}X = \mathbf{b}$, $\mathbf{e_3}X = \mathbf{c}$, $(0\ \lambda\ 0)X = \lambda\mathbf{b}$, $(1\ 0\ \lambda)X = \mathbf{a}+\lambda\mathbf{c}$

演習 2.9 (1) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = A$ **(2)** $(\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a})$ **(3)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \lambda\vec{a}+\vec{c})$ **(4)** $(\vec{a}\ \lambda\vec{b}\ \vec{c})$

演習 2.10 (1) $\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \lambda\mathbf{a}+\mathbf{c} \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} \lambda\mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$

演習 2.11 $\mathbf{x} \cdot {}^t\mathbf{x} = p^2 + q^2 + r^2$, ${}^t\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p^2 & pq & pr \\ pq & q^2 & qr \\ pr & qr & r^2 \end{pmatrix}$

演習 2.12 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

演習 2.13 $n = 2$ の場合に示してみましょう. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ として $AX = XA$ の条件を考えましょう.

演習 2.14 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = I_3$ から A は正則で $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$

演習 2.4.2 $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & \alpha q + \frac{p}{\beta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ から $q = -\frac{p}{\alpha\beta}$ とすれば $AB = BA = I_2$ となります.

演習 2.16 AB と C が正則ですから ABC が正則となります. このとき $(ABC)^{-1} = C^{-1}(AB)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ が従います.

演習 2.17 (1) ${}^tAA = \begin{pmatrix} ||\vec{a}_1||^2 & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & (\vec{a}_1, \vec{a}_3) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & ||\vec{a}_1||^2 & (\vec{a}_2, \vec{a}_3) \\ (\vec{a}_3, \vec{a}_1) & (\vec{a}_3, \vec{a}_2) & ||\vec{a}_3||^2 \end{pmatrix}$ **(2)** ${}^tAA = O_3$ のとき $||\vec{a}_1|| = ||\vec{a}_2|| = ||\vec{a}_3|| = 0$ から $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}_3 = \vec{0}$ となり, $A = O_{m,3}$ が従います.

演習 2.18 (1) ${}^t({}^tAA) = {}^tA^t({}^tA) = {}^tAA$ **(2)** ${}^t({}^tCSC) = {}^tC^tS^t({}^tC) = {}^tCSC$

演習 2.19 $||A\vec{x}||^2 = (A\vec{x}, A\vec{x}) = ({}^tAA\vec{x}, \vec{x})$

第 3 章

演習 3.1 (1) $P_4(1,3)P_4(1,3) = P_4(1,3) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \end{pmatrix} = I_4$

(2) $Q_4(2,\lambda)Q_4(2,\frac{1}{\lambda}) = Q_4(2,\lambda)\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_4\end{pmatrix} I_4$

(3) 与式 $= R_4(2,4,-\lambda)\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \lambda\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \lambda\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4-\lambda\mathbf{e}_2\end{pmatrix} = I_4$

演習 3.2 (1) $\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{14}{15}\\ 0&1&0&\frac{12}{5}\\ 0&0&1&-\frac{2}{15}\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix}1&0&7&0\\ 0&1&-6&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}$

演習 3.3

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\ 2&3&4&5&0\\ 3&5&5&7&0\end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\ 0&-1&-2&-3&0\\ 0&-1&-4&-5&0\end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\ 0&1&2&3&0\\ 0&-1&-4&-5&0\end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\ 0&1&2&3&0\\ 0&0&-2&-2&0\end{array}\right) \xrightarrow{(4)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\ 0&1&2&3&0\\ 0&0&1&1&0\end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&0\end{array}\right) \xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&0\end{array}\right)$$

ここで (1) $2r+=1r\times(-2)$, $3r+=1r\times(-3)$, (2) $2r\times=(-1)$, (3) $3r+=2r$, (4) $(3r\times=(-1))$, (5) $2r+=3r\times(-2)$, $2r+=1r\times(-3)$, (6) $1r+=2r\times(-2)$ と行基本変形しています.

演習 3.4

$$A \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix}1&1&0&-1\\ 0&2&2&-2\\ 3&2&-1&-2\\ 4&5&1&-5\end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix}1&1&0&-1\\ 0&2&2&-2\\ 0&-1&-1&1\\ 0&1&1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\ 0&1&1&-1\\ 0&-1&-1&1\\ 0&1&1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix}1&1&0&-1\\ 0&1&1&-1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\ 0&1&1&-1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ここで (1) $1r \leftrightarrow 3r$, (2) $3r+=1r\times(-3)$, $4r+=1r\times(-4)$, (3) $2r\times\frac{1}{2}$, (4)

$3r+=2r,\ 4r+=2r\times(-1)$, (5) $1r+=2r\times(-1)$ と行基本変形しています.

$$c_1{}^t(1\ \ -1\ 1\ 0)+c_2{}^t(0\ 1\ 0\ 1)={}^t(*\ \ *\ \ c_1\ c_2)=\vec{0}$$

から $c_1=c_2=0$ が従います.

演習 3.5 (1) $\vec{x}=\alpha\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\ \frac{1}{3}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{x}=\alpha\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

演習 3.6 省略

演習 3.7 (1) $\vec{x}=\alpha\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\ \frac{6}{5}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{2}{5}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ **(2)** 解はない

演習 3.8 解が存在する必要十分条件は $c=5$.

演習 3.9 $\vec{\beta}={}^t(\alpha\ \beta\ \gamma)$ とするとき，解が存在する必要十分条件は $8\alpha+2\beta-\gamma=0$.

演習 3.10 $XP_3(1,3)=(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)(\vec{e}_3\ \vec{e}_2\ \vec{e}_1)=(\vec{x}_3\ \vec{x}_2\ \vec{x}_1)$

$XQ_3(2,\lambda)=(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)(\vec{e}_1\ \lambda\vec{e}_2\ \vec{e}_2)=(\vec{x}_1\ \lambda\vec{x}_2\ \vec{x}_3)$

$XR_3(1,3,\lambda)=(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)(\vec{e}_1+\lambda\vec{e}_3\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)=(\vec{x}_1+\lambda\vec{x}_3\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)$

演習 3.11

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

演習 3.12 (1) $\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\-2&-2&1&3\\1&2&-1&-2\\0&-3&1&3\end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{5}&-\frac{8}{5}\\0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{2}&0&1\end{pmatrix}$

演習 3.13 与えられた関係式を $(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ と表現しま

す．そして $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{7}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$ と計算すると $(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}) = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{7}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$ と計算されます.

第 4 章

演習 4.1 $(1) \times c - (2) \times a$ から $(bc - ad)y = c\alpha_1 - a\alpha_2$ したがって $(ad - bc)y = a\alpha_2 - c\alpha_1$ を得ます．これは $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha_1 \\ c & \alpha_2 \end{vmatrix}$ に他なりません．$\det(A) \neq 0$ のとき (4.3) が導かれます.

演習 4.2 **(1)** 1 **(2)** 1 **(3)** λ **(4)** -1 **(5)** ab **(6)** ab

演習 4.3 **(ii)** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -(b_1a_2 - b_2a_1) = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$

(ii)' $|\vec{a}\ \vec{a}| = -|\vec{a}\ \vec{a}|$ から $|\vec{a}\ \vec{a}| = 0$ が従います.

演習 4.4 $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ とします．このとき

$det(A) = a_1b_2 - a_2b_1,\ \det({}^tA) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$ から **(ii)** が分かります.

1 行に関する線型性は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} &= \left| {}^t(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \quad {}^t\mathbf{c} \right| = \left| \lambda \cdot {}^t\mathbf{a} + \mu \cdot {}^t\mathbf{b} \quad {}^t\mathbf{c} \right| \\ &= \lambda \left| {}^t\mathbf{a} \quad {}^t\mathbf{c} \right| + \mu \left| {}^t\mathbf{b} \quad {}^t\mathbf{c} \right| = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と示すことができます．2 行に関する線型性も同様です．行に関する交代性は

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \left| {}^t\mathbf{a} \quad {}^t\mathbf{b} \right| = -\left| {}^t\mathbf{b} \quad {}^t\mathbf{a} \right| = -\begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix}$$

と示されます.

演習 4.5 **(1)** $\lambda = 1, 6$ **(2)** $\lambda = 2, 5$

演習 4.2.2 $\vec{x} = {}^t(x_1\ \ x_2\ \ x_3),\ \vec{y} = {}^t(y_1\ \ y_2\ \ y_3)$ とします．このとき $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} =$

${}^t(\lambda x_1 + \mu y_1\ \lambda x_2 + \mu y_2\ \lambda x_3 + \mu y_3)$ が成立します．このとき

$$\begin{aligned} F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) &= a_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + a_2(\lambda x_2 + \mu y_2) + a_3(\lambda x_3 + \mu y_3) \\ &= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \mu(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y}) \end{aligned}$$

と補助定理 4.2 が示されます．(4.6) については，

$$F(\vec{x}) = |\vec{x}\ \vec{b}\ \vec{c}| = x_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

と定めて，補助定理 4.2 を適用します．

演習 4.7 2 行の $-\frac{a_3}{a_2}$ 倍を 3 行に加えると $R(2,3,-\frac{a_3}{a_2})A = \begin{pmatrix} 0 & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3' & c_3' \end{pmatrix}$ を得ます. これを転置すると ${}^tA^tR(2,3,-\frac{a_3}{a_2}) = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ b_1' & b_2 & b_3' \\ c_1' & c_2 & c_3' \end{pmatrix}$ を得ます. この 2 つの式の両辺の行列式は，$a_1 \neq 0$ の場合と同様に $A = -a_2 \begin{pmatrix} b_1' & c_1' \\ b_3' & c_3' \end{pmatrix}$ と $|{}^tA| = -a_2 \begin{pmatrix} b_1' & b_3' \\ c_1' & c_3' \end{pmatrix}$ を得ます．これから (4.10) が従います.

演習 4.8 (1) 0 **(2)** 2 **(3)** 12 **(4)** $(a-b)(b-c)(c-a)$

演習 4.9 省略

演習 4.10 (1) $x = -\frac{7}{5}$, $y = \frac{8}{5}$, $z = \frac{7}{2}$ **(2)** $x = -\frac{11}{2}$, $y = 6$, $z = 4$

演習 4.11 省略

演習 4.12 (1) $\sqrt{3}$ **(2)** $\pm{}^t(-1\ 1\ 1)$ **(3)** 4

演習 4.13 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき 反転数 $= 0$, $\varepsilon(\sigma) = 1$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき 反転数 $= 1$, $\varepsilon(\sigma) = -1$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき 反転数 $= 0$, $\varepsilon(\sigma) = 1$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき 反転数 $= 2$, $\varepsilon(\sigma) = 1$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき 反転数 $= 2$, $\varepsilon(\sigma) = 1$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき 反転数 $= 3$, $\varepsilon(\sigma) = -1$

演習 4.14 反転数 $= 9$, $\varepsilon(\sigma) = -1$

演習 4.16 $\sigma\tau = \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

演習 4.17 (1) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **(2)** $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

演習 4.20 **(1)** $-x_{31}x_{12}x_{43}x_{24}$ **(2)** $-x_{21}x_{42}x_{13}x_{34}$
演習 4.21 $\det(P_m(i,j)) = -1$, $\det(Q_m(i,\lambda)) = \lambda$, $\det(R_m(i,j,\lambda)) = 1$
演習 4.22 **(1)** 0 **(2)** -26 **(3)** 440 **(4)** -4
演習 4.23 省略
演習 4.24 **(1)** $-\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 10 & 4 & -7 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
演習 4.25 $\lambda = -1, 0, 4$
演習 4.26 **(i)** $a \neq -2, 1$ のとき 3, **(ii)** $a = -2, 1$ のとき 2, **(iii)** $a = 1$ のとき 1
演習 4.27 $x = \frac{8}{7},\ y = -\frac{40}{7},\ z = 2,\ w = \frac{24}{7}$

第 5 章

演習 5.1 $\vec{x},\ \vec{y} \in V + W$ とします．このとき $\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{w}_1$, $\vec{y} = \vec{v}_2 + \vec{w}_2$ を満たす $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ と $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ が存在します. すると $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y} = \lambda(\vec{v}_1+\vec{w}_1)+\mu(\vec{v}_2+\vec{w}_2) = (\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) + (\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2)$ において $\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V$, $\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 \in W$ から $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V + W$ が成立します.
$\vec{x},\ \vec{y} \in V \cap W$ とします．このとき $\vec{x},\ \vec{y} \in V$ かつ $\vec{x},\ \vec{y} \in W$ が成立します．V と W が部分空間ですから $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V$ かつ $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in W$ が成立します．これは $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V \cap W$ を意味します.
$\vec{x},\ \vec{y} \in V^\perp$ とします．このとき任意の $\vec{v} \in V$ に対して $(\vec{x},\vec{v}) = (\vec{y},\vec{v}) = 0$ が成立します．すると $(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y},\vec{v}) = \lambda(\vec{x},\vec{v}) + \mu(\vec{y},\vec{v}) = \lambda\cdot 0 + \mu\cdot 0 = 0$ から $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V^\perp$ が従います.
演習 5.2 $c = -6$
演習 5.3 $c\vec{x} = \vec{0}$ とします．$\vec{x} \neq \vec{0}$ が成立しますから，ある j に対して $\vec{x}$ の第 j 成分に関して $x_j \neq 0$ が成立します．ここで $c\vec{x} = \vec{0}$ の第 j 成分について $cx_j = 0$ が成立しますから，$c = 0$ が従います.
演習 5.4 $c_1P\vec{v}_1 + \cdots + c_kP\vec{v} = \vec{0}$ とします．この両辺に P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}\left(c_1P\vec{v}_1 + \cdots + c_kP\vec{v} = \vec{0}\right) = c_1P^{-1}P\vec{v}_1 + \cdots + c_kP^{-1}P\vec{v}_k = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k$$

が従います．$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k$ が線型独立であることから $c_1 = \cdots = c_k = 0$ が従います.
演習 5.5 $\vec{c} \in \mathbf{R}^k$ に対して $(\vec{y}_1\ \cdots\ \vec{y}_k)\vec{c} = (\vec{x}_1\ \cdots\ \vec{x}_k)Q\vec{c}$ となりますから, $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k$ が線型独立であることから $Q\vec{c} = \vec{0}$ が従います．このとき Q が正則ですから $\vec{c} = \vec{0}$ となります.

演習 5.6 演習 5.5 において $Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ とします.

演習 5.7 $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & a\\ -1 & 3 & 1 & b\\ 2 & -4 & 0 & c\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & a\\ 0 & 1 & 1 & a+b\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b+c\end{array}\right)$ から $-2a+4b+3c=0$ が必要十分条件になります.

演習 5.8 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & x\\ 2 & 4 & 3 & y\\ 3 & 1 & 2 & z\\ 1 & 3 & 2 & w\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & x\\ 0 & 2 & 1 & y-2x\\ 0 & 0 & 0 & -5x+y+z\\ 0 & 0 & 0 & x-y+w\end{pmatrix}$ と行基本変形されることから，求める条件は $\begin{pmatrix}-5 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$ と表されます.

演習 5.9 (1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ -1 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ と行基本変形されますから，与えられたベクトルは線型従属です.

(2) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 1\\ -2 & 3 & 7\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ と行基本変形されますから，与えられたベクトルは線型独立です.

演習 5.10 (1) $\mathrm{Im}(A)$ の基底　${}^t(1\ 2\ 5)$, ${}^t(2\ 3\ 7)$, $\ker(A)$ の基底　${}^t(8\ \ -7\ 1)$

(2) $\mathrm{Im}(A)$ の基底　${}^t(1\,3\,2)$, ${}^t(-2\,1\,10)$, $\ker(A)$ の基底　${}^t(3\ \frac{5}{7}\ 1\ 0)$, ${}^t(-5-\frac{17}{7}\ 0\ 1)$

演習 5.11 $(A|\vec{v})$ を行基本変形することによって $\vec{v}\in\mathrm{Im}(A)$ と $\begin{pmatrix}3 & -3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$ と同値であることが分かります．他方、$(B|\vec{v})$ を行基本変形して $\vec{v}\in\mathrm{Im}(B)$ と $\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 01\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$ が同値であることが従います．このことから $\vec{v}\in\mathrm{Im}(A)\cap\mathrm{Im}(B)$ と $\begin{pmatrix}3 & -3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 01\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$ とが同値であることが従います．この方程式を解けば，基底が求まります.

演習 5.12 必要であることを示します（十分であるのは自明です）．$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)$, $B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2)$ とします．このとき $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$ から $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathrm{Im}(B)$ が成立します．$\vec{a}_1 \in \mathrm{Im}(B)$ から $x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 = \vec{a}_1$ が従いますが，これは

$$x = 1,\ y = 1, x\alpha' + y\beta' = \alpha$$

と必要十分で, これから $\alpha = \alpha'$ が必要であることが分かります. 同様に $x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 = \vec{a}_2$ から $\beta = \beta'$ も従います.

演習 5.13 (1) ${}^t(1\ 0\ 3),\ {}^t(0\ 1\ 3)$ **(2)** ${}^t(1\ 0\ 0\ 1),\ {}^t(0\ 1\ 0\ 3),\ {}^t(0\ 0\ 1\ -2)$

演習 5.14 ${}^t-5\ 3\ 1\ 0,\ {}^t(-2\ 0\ 0\ 1)$

演習 5.15 $\mathrm{rank}(A|\vec{b}) = 2$ であることが行基本変形によって分かる．$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ から，方程式は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

と同値です．このとき解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

と表示されます.

演習 5.16 $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

演習 5.17 $\vec{p}_1 = \frac{1}{2}{}^t(1\ 1\ 1\ -1)$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{20}}{}^t(1\ -1\ 3\ 3)$, $\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}{}^t(3\ 2\ 4\ 1)$

第 6 章

固有値問題入門–2 次元の場合

6.1　線型変換と座標変換

6.1.1　座標変換

1.7 節で説明した座標変換について $n = 2$ の場合に説明します．以下では 2 次元部分空間 V は $V = \mathbf{R}^2$ となります．また 1.7 節における V 中の平行でない 2 本のベクトルとして標準単位ベクトル

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を取ります。このとき $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ が定める座標は標準的な

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

となります．次に平行でない

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},\ \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

を取ります．このとき $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ であることから

$$\Delta := |\vec{p}\ \vec{q}| = p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0$$

が成立します．$\vec{p}$ と $\vec{q}$ を用いて座標変換するために

$$P = (\vec{p}\ \vec{q})$$

と定めて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と $\vec{p}$, $\vec{q}$ を用いる座標が定義できます.

6.1.2　線型変換

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

を考えます. この対応によって写像

$$T_A:\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

が定まりますが, これを A が定める線型変換と呼びます. この T_A を $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ 座標で表現することを考えます.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と対応しますから

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ 座標では $P^{-1}AP$ が定める線型変換 $T_{P^{-1}AP}$ となります.

変換 ここで出てくる線型変換の変換についてです. X を集合とするとき X から X への写像

$$f:\ X \longrightarrow X$$

のことを X 上の変換と呼びます. 上で T_A を定義するときに用いた x' と y' ですが, x と y が定める同じ座標系を用いていることを示すためにダッシュ「$'$」を使っています.

6.2　行列の対角化

6.2.1　固有多項式

以下では $A \in M_2(\mathbf{R})$ が定める線型変換を座標変換を行って、簡単な形、特に対角行列が定める線型変換にすることを考えます．まず具体的な例として

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

について考えます.

平行でない 2 本のベクトル $\vec{p},\ \vec{q} \in \mathbf{R}^2$ を用いた正則行列 $P = (\vec{p}\ \vec{q})$ によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

とすることを考えます．このとき $AP = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が従いますが、P の列ベクトルを用いると

$$(A\vec{p}\ A\vec{q}) = (\alpha\vec{p}\ \beta\vec{q})$$

となります．各列を見ると

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p},\ A\vec{q} = \alpha\vec{q}$$

すなわち

$$(\alpha I_2 - A)\vec{p} = (\beta I_2 - A)\vec{q} = \vec{0}$$

であることが分かります．他方 $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ ですから $\vec{p} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{q} \neq \vec{0}$ が成立します．ここで次の定理 6.1 を用いると

$$\det(\alpha I_2 - A) = \det(\beta I_2 - A) = 0 \tag{6.1}$$

が従います.

定理 6.1. $B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して次の (6.2) と (6.3) は同値です.

$$B\vec{p} = \vec{0},\ \vec{p} \neq \vec{0} \text{を満たす } \vec{p} \in \mathbf{R}^2 \text{ が存在する.} \tag{6.2}$$

$$\det B = 0 \tag{6.3}$$

ここで

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &:= \det(\lambda I_2 - A)\\ &= \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -4 & \lambda-3\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-1)(\lambda-3)-(-2)(-3)\\ &= \lambda^2-4\lambda-5=(\lambda-5)(\lambda+1)\end{aligned}$$

を定義すると (6.1) から α と β は $\Phi_A(\lambda)$ の根であることが分かります.

ここで $\Phi_A(\lambda)$ を一般的に定義します.

定義 6.1. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-a)(\lambda-d)-(-b)(-c)\\ &= \lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc\\ &= \lambda^2-(a+d)\lambda+\det(A)\end{aligned}$$

を A の固有多項式と呼びます.

さらに A に関する具体的な考察を行います. (6.1) から

$$\Phi_A(\alpha)=\Phi_A(\beta)=0$$

であることは分かりましたが, $\Phi_A(\lambda)$ の根 $\lambda=1,5$ との関係は分かりません.

実は, 固有多項式は線型座標変換を行っても変わりません. すなわち, 一般に $A\in M_2(\mathbf{R})$ と正則な $P\in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\Phi_A(\lambda)=\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) \tag{6.4}$$

が成立します. 実際,

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_2 - P^{-1}AP) &= \det(P^{-1}\lambda I_2 P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I_2 - A)P)\\ &= \det(P^{-1})\det(\lambda I_2 - A)\det(P)\\ &= \det(\lambda I_2 - A)\end{aligned}$$

から導けます. ここで $\det(P^{-1})\det(P)=\det(P^{-1}P)=\det(I_2)=1$ であることを用いました.

公式 (6.4) を応用しましょう．$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ですから

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & 0 \\ 0 & \lambda - \beta \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

から

$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

が分かります．このことから

$$\alpha = 5,\ \beta = -1 \quad \text{または} \quad \alpha = -1,\ \beta = 5$$

であることが従います.

6.2.1 節を締めくくるために、公式 (6.4) を定理 6.2 にまとめます.

定理 6.2. 2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ と正則な $P \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) \tag{6.5}$$

が成立します.

6.2.2　固有値と固有ベクトル

以下では $\alpha = 5,\ \beta = -1$ の場合を考えます．まず

$$(5I_2 - A)\,\vec{p} = \vec{0}$$

を用いて $\vec{p}$ を求めます.

$$\begin{aligned} (5I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2x - y = 0 \end{aligned}$$

から

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となります.

同様に

$$(-I_2 - A)\,\vec{q} = \vec{0}$$

を用いて $\vec{q}$ を求めましょう.

$$
\begin{aligned}
(-I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow x + y = 0
\end{aligned}
$$

から

$$
\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

となります.

ここで $\vec{p}$ と $\vec{q}$ においてそれぞれ $x = 1$ の場合を考えます[*1]．すなわち

$$
\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ P = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}
$$

と定めると

$$
\det(P) = -3 \neq 0
$$

から $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ 従って P が正則であることが分かります[*2]．さらに

$$
A\vec{p} = 5\vec{p},\ A\vec{q} = -\vec{q}
$$

から

$$
\begin{aligned}
AP &= (A\vec{p}\ A\vec{q}) = (5\vec{p}\ \ -\vec{q}) \\
&= (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が従います．そして P が正則ですから

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

となります.

以上で $P = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ が定める線型座標変換

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}
$$

[*1] $x \neq 0$ であれば何でもいいことが分かります.

[*2] 実は一般論があって $\det(P)$ を調べなくても，この状況で P が正則となることが分かります．179 ページの定理 6.3 で説明します.

によって線型変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\xi \\ -\eta \end{pmatrix}$$

と表現されることが示されました．

この 6.2.2 節を締めくくるのにあたって，α, β, $\vec{p}$, $\vec{q}$ に対応する定義を行います．

定義 6.2. $A \in M_2(\mathbf{R})$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v},\ \ \vec{v} \neq \vec{0}$$

を満たす $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ が存在するとき α を A の固有値と呼びます．また，このとき $\vec{v}$ を α に対する固有ベクトルと呼びます．

定理 6.1 によると $\alpha \in \mathbf{R}$ が A の固有値であることと

$$\Phi_A(\alpha) = 0$$

であることと必要十分であることが分かります．それは

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v} \Leftrightarrow (\alpha I_2 - A)\vec{v} = \vec{0}$$

を確認して定理 6.1 において $B = \alpha I_2 - A$ とすればすぐに分かります．

固有多項式が表す方程式

$$\Phi_A(\lambda) = 0$$

を**固有方程式**と呼びますが，固有値は固有多方程式の根とも言い換えることができます．

6.2.3　対角化可能な行列–十分条件

これまで行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して正則な $P \in M_2(\mathbf{R})$ を求めて

$$P^{-1}AP$$

を対角行列とすることを考えてきました．様々な定義を与えながら説明してきましたが，もう一度別の例で計算してみましょう．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

について考えます．この固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 6 \\ -4 & \lambda-9 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda-3)(\lambda-5)$$

より A の固有値は $\lambda = 3, 5$ であることが分かります．次にそれぞれの場合について固有ベクトルを求めましょう．

(i) $\lambda = 3$ のとき

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Leftrightarrow (3I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2x + 3y = 0 \end{aligned}$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{3}x \end{pmatrix} = \frac{x}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \ (x \neq 0)$$

であることが分かります．

(ii) $\lambda = 5$ のとき

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Leftrightarrow (5I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow x + y = 0 \end{aligned}$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ (x \neq 0)$$

であることが分かります．

　ここで

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ P = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

と定めます．このとき P は次の定理 6.3 によって正則となります．従って

$$A(\vec{p}\ \vec{q}) = (3\vec{p}\ 5\vec{q}) = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

となります.

定理 6.3. $A \in M_2(\mathbf{R})$ とします．相異なる $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対して $\vec{p},\ \vec{q} \in \mathbf{R}^2$ が

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p},\ A\vec{q} = \beta\vec{q}$$

$$\vec{p} \neq \vec{0},\ \vec{q} \neq \vec{0}$$

を満たすとします．このとき 2 次正方行列 $P = (\vec{p}\ \vec{q})$ は正則です.

この定理 6.3 を証明しましょう．P が正則であることと

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{p} + y\vec{q} = \vec{0} \Rightarrow x = y = 0$$

であることと必要十分条件ですから

$$x\vec{p} + y\vec{q} = \vec{0}$$

を仮定します．この両辺に $(\beta I_2 - A)$ を掛けると

$$(\beta I_2 - A)\vec{p} = ((\beta - \alpha)I_2 + (\alpha I_2 - A))\,\vec{p} = (\beta - \alpha)\vec{p},\ (\beta I_2 - A)\vec{q} = \vec{0}$$

から

$$x(\beta - \alpha)\vec{p} = \vec{0}$$

となります．$\beta - \alpha \neq 0$ から

$$x\vec{p} = \vec{0}$$

を得ますが，次の演習 6.1 から $x = 0$ となります．そして

$$y\vec{q} = \vec{0}$$

を得ますが，同様に $\vec{q} \neq \vec{0}$ から $y = 0$ を得ます．以上で $P = (\vec{p}\ \vec{q})$ が正則であることが証明されました.

演習 6.1. $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{v} \neq \vec{0}$ を満たすとします．このとき，$x\vec{v} = \vec{0}$ ならば $x = 0$ が従うことを示しましょう.

ある正則行列 P に対して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき $A \in M_2(\mathbf{R})$ は**対角化可能**であると定義します．上の定理 6.3 を用いると A の固有多項式が相異なる 2 実根を持つとき A は対角化可能であることが分かります．

定理 6.4. $A \in M_2(\mathbf{R})$ の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

が相異なる 2 実根 α，β を持つとき，A は対角化可能となります．

定理 6.4 を証明しましょう．$\Phi_A(\alpha) = \Phi_A(\beta) = 0$ であることから

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, \quad \vec{p} \neq \vec{0}$$
$$A\vec{q} = \beta\vec{q}, \quad \vec{q} \neq \vec{0}$$

を満たす $\vec{p}$，$\vec{q} \in \mathbf{R}^2$ が存在します．ここで定理 6.3 を用いると $P = (\vec{p}\ \vec{q})$ は正則となります．さらに

$$AP = A(\vec{p}\ \vec{q}) = (A\vec{p}\ A\vec{q}) = (\alpha\vec{p}\ \beta\vec{q}) = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

であることが分かります．

演習 6.2. 以下の行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ を対角化しましょう．

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 3 & -4\end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix}-4 & -2 \\ 3 & 1\end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix}1 & 12 \\ 3 & 1\end{pmatrix}$

6.2.4 固有多項式が重根を持つ場合

$A \in M_2(\mathbf{R})$ の固有多項式が重根を持つと仮定します．すなわち $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$\phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$$

が成立すると仮定します．さらに A が対角化可能であるとします．すなわち正則な $P \in M_2(\mathbf{R})$ が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとします．このとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2\end{pmatrix}$$

とすると定理 6.2 から

$$(\lambda-\alpha)^2=\Phi_A(\lambda)=\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda)=(\lambda-\gamma_1)(\lambda-\gamma_2)$$

が従いますから

$$\gamma_1=\gamma_2=\alpha$$

であることが分かります．よって

$$P^{-1}AP=\alpha I_2$$

となりますが，この両辺に左から P を右から P^{-1} を掛けると

$$A=P\cdot\alpha I_2\cdot P^{-1}=\alpha I_2$$

であることが導かれます．以上から次の定理 6.5 を証明しました．

定理 6.5. $A\in M_2(\mathbf{R})$ の固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-\alpha)^2$$

と重根 $\alpha\in\mathbf{R}$ を持つとします．このとき A が対角化可能ならば $A=\alpha I_2$ となります．

例えば $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}$ は

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-\alpha & 0\\ -1 & \lambda-\alpha\end{vmatrix}=(\lambda-\alpha)^2$$

ですが，この定理 6.5 から対角化できないことが分かります．実は、$A\in M_2(\mathbf{R})$ が

$$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-\alpha)^2,\ A\neq\alpha I_2$$

ならばある正則行列 $P\in M_2(\mathbf{R})$ が存在して

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}$$

となります（6.3.5 節，189 ページ）．

6.2.5　行列の累乗

$A \in M_2(\mathbf{R})$ が対角化可能であるとします．すなわち，正則な P^{-1} が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となるとします．このとき A^n を A の固有値を用いて表すことができます．

実際，この式の両辺の n 乗はそれぞれ

$$\left(P^{-1}AP\right)^n = P^{-1}A^nP, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

と帰納的に計算できますから

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

さらに

$$A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

を示すことができます．

6.3　Cayley-Hamilton の定理

6.3.1　Cayley-Hamilton の定理

この 6.3 節では対角化を用いないで行列の累乗を計算する方法を学びます．

そのために 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は恒等的にある等式を満たすことを示します．

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + db \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$(a+d)A = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + db \\ ac + dc & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

より

$$
\begin{aligned}
A^2-(a+d)A &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+db \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = -\det(A)I_2
\end{aligned}
$$

が成立します．以上から，次の定理 6.6 を示しました．

定理 6.6.（Hamiton-Cayley の定理） *2* 次正方行列 A に対して

$$
A^2-(a+d)A+\det(A)I_2=O \tag{6.6}
$$

が成立します．

この (6.6) は固有方程式

$$
\lambda^2-(a+d)\lambda+\det(A)=0
$$

に対して，変数 λ を A で，定数項を I_2 で置き換えた形になっていることに注意しましょう．

6.3.2 行列の累乗（単純固有値の場合）

ここで具体的な例をもとに Hamiton-Cayley の定理をどのように適用すれば A^n を計算できるか考えましょう．

$$
A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}
$$

とします．このとき Hamiton-Cayley の定理によって

$$
A^2-4A-5I_2=O \tag{6.7}
$$

が成立します．固有多項式が

$$
\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda-5)(\lambda+1)
$$

と因数分解できることに着目すると (6.7) は

$$
A(A-5I_2)=(-1)(A-5I_2) \tag{6.8}
$$

$$
A(A+I_2)=5(A+I_2) \tag{6.9}
$$

と変形できます．これから

$$A^n(A-5I_2) = (-1)^n(A-5I_2) \tag{6.10}$$
$$A^n(A+I_2) = 5^n(A+I_2) \tag{6.11}$$

が成立することが帰納的に証明できます．(6.10)−(6.11) から

$$(-6)A^n = (-1)^n(A-5I_2) - 5^n(A+I_2)$$

を経て

$$A^n = -\frac{1}{6}\{(-1)^n(A-5I_2) - 5^n(A+I_2)\}$$

を得ます．

一般に 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A) = 0$$

が相異なる 2 根 α と β を持つと仮定します．

$$\alpha \neq \beta \tag{6.12}$$

このとき固有多項式は

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$$

と因数分解でき，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta = a+d, \quad \det(A) = \alpha\beta$$

も得ます．このことから A に対して Hamiton-Cayley の定理を適用すると

$$A^2 - (\alpha+\beta)A + \alpha\beta I_2 = O$$

が導かれます．これを

$$A(A-\alpha I_2) = \beta(A-\alpha I_2) \tag{6.13}$$
$$A(A-\beta I_2) = \alpha(A-\beta I_2) \tag{6.14}$$

と変形すれば，帰納的に

$$A^n(A-\alpha I_2) = \beta^n(A-\alpha I_2) \tag{6.15}$$
$$A^n(A-\beta I_2) = \alpha^n(A-\beta I_2) \tag{6.16}$$

を得ます．(6.15)−(6.16) から

$$(\beta-\alpha)A^n = (\beta^n-\alpha^n)A + \alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})I_2$$

が従います．仮定 (6.12) から $\beta-\alpha \neq 0$ ですから公式

$$A^n = \frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}A + \alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\beta-\alpha}I_2 \tag{6.17}$$

を得ます．この公式 (6.17) を

$$A^n = \frac{\alpha^n}{\beta-\alpha}(\beta I_2 - A) - \frac{\beta^n}{\beta-\alpha}(\alpha I_2 - A) \tag{6.18}$$

と整理すると次の定理 6.7 を示したことになります．

定理 6.7. $A \in M_2(\mathbf{R})$ の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$$

が相異なる 2 実根 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ を持つとします．すなわち $\alpha \neq \beta$ が成立するとします．このとき n によらない 2 次正方行列 X_0，$X_1 \in M_2(\mathbf{R})$ が存在して

$$A^n = \alpha^n X_0 + \beta^n X_1$$

が成立します．

演習 6.3. 以下の行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して，*Cayley-Hamilton* の定理を用いて A^n を求めましょう．
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

6.3.3 固有値が重根の場合

今度は 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A) = 0$$

が重根 α を持つとします．このとき固有多項式は

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A) = (\lambda-\alpha)^2$$

と因数分解でき，解と係数の関係から

$$2\alpha = a + d, \quad \det(A) = \alpha^2$$

も得ます．このことから A に対して Cayley-Hamilton の定理を適用すると

$$A^2 - 2\alpha A + \alpha^2 I_2 = O$$

が導かれます．このとき重根を持たない上の場合と同様に

$$A(A - \alpha I_2) = \alpha(A - \alpha I_2)$$

より

$$A^n(A - \alpha I_2) = \alpha^n(A - \alpha I_2) \tag{6.19}$$

を得ます．これから A^n を求めるには以下のようにします．$\alpha = 0$ の場合は $A^2 = O$ ですから，$A^n = O$ $(n \geq 2)$ となります．以下 $\alpha \neq 0$ の場合を考えます．$B = \frac{1}{\alpha}A$ と定めると $B^n = \frac{1}{\alpha^n}A^n$ が成立します．このとき (6.19) の両辺を $\frac{1}{\alpha^{n+1}}$ 倍して

$$B^{n+1} - B^n = B - I_2$$

が成立することが分かります．階差が一定の $B - I_2$ となりますから

$$B^n = B + (n-1)(B - I_2)$$

が分かります．これから

$$A^n = \alpha^{n-1}A + (n-1)\alpha^{n-1}(A - \alpha I_2) = n\alpha^{n-1}A - (n-1)\alpha^n I_2 \tag{6.20}$$

が導けます．

例 6.1. 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有多項式は

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$$

と計算されます．*Cayley-Hamilton* の定理によると

$$A^2 - 4A + 4I_2 = 0_2 \quad すなわち \quad A(A - 2I_2) = 2(A - 2I_2)$$

となります．ここで $B = \frac{1}{2}A$ と定めると，この式から

$$B^{n+1} - B^n = B - I_2$$

が従いますから

$$B^n = B + (n-1)(B - I) \quad から \qquad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I_2$$

を得ます.

演習 6.4. 以下の $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して *Cayley-Hamilton* の定理を用いて A^n を求めましょう.

(1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

6.3.4 行列の多項式

固有多項式が重根を持つ実 2 次正方行列 A に対して $A \in M_2(\mathbf{R})$ の n 乗を別の形で計算します.

λ の多項式

$$g(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

と一般の 2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$g(A) = a_kA^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1A + a_0I_2$$

と定めます．別の多項式

$$f(\lambda) = b_\ell\lambda^\ell + b_{\ell-1}\lambda^{\ell-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0$$

があるとき

$$f(A) + g(A) = (f+g)(A), \ f(A)g(A) = (fg)(A)$$

が成立します.

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A) = 0$$

が重根 α を持つとします．このとき固有多項式は

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A) = (\lambda - \alpha)^2$$

と因数分解でます．λ^n を固有多項式 $(\lambda-\alpha)^2$ で割る余りを求めましょう．固有多項式が 2 次ですから，余りは λ の 1 次式です．従って

$$\lambda^n = \varphi(\lambda)(\lambda-\alpha)^2 + c\lambda + d \tag{6.21}$$

と定数 c と d を用いて表示できます．この式に $\lambda=\alpha$ を代入して

$$\alpha^n = c\alpha + d$$

を得ます．また (6.21) の両辺を λ で微分して

$$n\lambda^{n-1} = \varphi'(\lambda)(\lambda-\alpha)^2 + 2\varphi(\lambda)(\lambda-\alpha) + c$$

を得ますが，これに $\lambda=\alpha$ を代入して

$$n\alpha^{n-1} = c$$

が従います．以上から $c = n\alpha^{n-1}$ と $d = -n\alpha^n + \alpha^n$ となり

$$\lambda^n = \varphi(\lambda)(\lambda-\alpha)^2 + n\alpha^{n-1}\lambda + n\alpha^n - \alpha^n \tag{6.22}$$

が成立します．これに A を代入すると

$$A^n = n\alpha^{n-1}A - (n\alpha^n - \alpha^n)I_2 = n\alpha^{n-1}A - (n-1)\alpha^n I_2$$

と 186 ページの (6.20) を示すことができます.

演習 6.5. 以下の $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して上で示した方法を用いて A^n を求めましょう.
(1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$　**(2)** $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$　**(3)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$　**(4)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

演習 6.6. ここで示した方法を用いて *2* 次正方行列の固有多項式が重根を持たない場合に A^n を求めてください（*185* ページの公式 (6.17) を示してください).

演習 6.7. 以下の行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して，演習 *6.6* で示した方法を用いて A^n を求めましょう.
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$　**(3)** $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

6.3.5　固有方程式が重根を持つ場合の標準形–Jordan 標準形

今まで，固有多項式が相異なる実根を持つ場合，2 次正方行列が対角化可能であること示しました．2 次正方行列 A の固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ が，重根 α を持つ場合で対角化できる場合

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_2$$

から

$$A = P\alpha I_2 P^{-1} = \alpha I_2$$

と単位行列 I_2 の固有値倍であることが従います．したがって，単位行列の定数倍である場合を除けば，固有多項式が重根を持つ場合は行列 A は対角化できないことが分かります．しかし，この場合も *Jordan* **標準形**と呼ばれる単純な標準形があり，応用上有用です．

例 6.1 で考えた 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について考えてみます．A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$$

と $\lambda = 2$ を重根として持ちます．まず

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して $(A - 2I_2)\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ であるベクトル $\vec{p}_1$ を求めます．例えば

$$\vec{p}_1 = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\vec{p}_2 = (A - 2I_2)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります．このとき $(A - 2I_2)^2 = O_2$ が Cayley-Hamilton の定理から従い，

$$(A - 2I_2)\vec{p}_2 = (A - 2I_2)^2\vec{p}_1 = O_2\vec{p}_1 = \vec{0} \quad \text{i.e.} \quad A\vec{p}_2 = 2\vec{p}_2$$

を得ます．以上から

$$A\vec{p}_1 = 2\vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad A\vec{p}_2 = 2\vec{p}_2$$

を得ますが，これを $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ を用いて行列で表現すると

$$AP = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります．さらに行列 $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ は正則であることが分かります．実際

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0} \tag{6.23}$$

から $c_1 = c_2 = 0$ を示すことができます．(6.23) の両辺に $(A - 2I_2)$ をかけると

$$c_1\vec{p}_2 = \vec{0}$$

となります．$\vec{p}_2 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ が従います（演習 6.1, 179 ページ）．これを (6.23) に代入すると

$$c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$$

を経て，$c_1 = 0$ を得ます．以上で

$$A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

を得ます．

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$

を帰納的に示すことができますから

$$A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

を得ます．

一般に実 2 次正方行列 A の固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ が重根を持ち，A が単位行列の定数倍でない場合は

$$A = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}P^{-1}$$

を満たす正則行列を上のように構成することができます．

演習 6.8. 以下の $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して *Jordan* 標準形を求めましょう．

(1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

第 7 章

回転行列・直交行列・2 次形式—2 次元の場合

7.1　回転行列

2 次正方行列

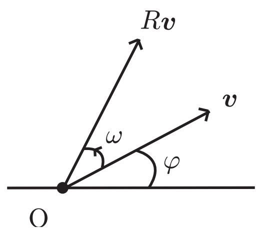
$$R = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

を考えましょう．この行列は幾何的に大事な性質を持っています．そのことを理解するために 2 次元ベクトル $\vec{v}(\neq \vec{0}) \in \mathbf{R}^2$ を $r > 0$ を用いて

$$\vec{v} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

と表示して R を掛けます.

$$\begin{aligned} R\vec{v} &= \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \cdot r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} \cos\omega\cos\varphi - \sin\omega\sin\varphi \\ \sin\omega\cos\varphi + \cos\omega\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} \cos(\omega+\varphi) \\ \sin(\omega+\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



から $R\vec{v}$ は $\vec{v}$ を角度 ω 回転したベクトルとなることが分かります．このことから R を**回転行列**と呼びます.

回転行列の性質をいくつか紹介しましょう.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} R_\theta R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'} \end{aligned}$$

から

$$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} \tag{7.1}$$

を得ます（この式は回転行列の幾何的な意味を考えると自然なものです）. **回転行列の積は回転行列になる**ことに注意しましょう.

さらに (7.1) から

$$R_{-\theta} R_\theta = R_\theta R_{-\theta} = R_0 = I_2$$

が従いますが、これから**回転行列は正則で逆行列が回転行列になる**ことが分かります.

$$\begin{aligned} (R_\theta)^{-1} = R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= {}^t\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = {}^tR \end{aligned}$$

から

$${}^tRR = R\,{}^tR = I_2 \tag{7.2}$$

が従います.

回転行列 R と任意のベクトル $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \tag{7.3}$$

が成立します. これは $\vec{v}$ と $\vec{w}$ のなす角度を ϕ とするとき, 内積が

$$(\vec{v}, \vec{w}) = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cos\phi$$

と表されることから分かります．実際，回転してもベクトルの大きさと角度は変わりません．この (7.3) を

$$(R\vec{R}\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{R}\vec{v}, {}^tRR\vec{w}) = (\vec{R}\vec{v}, I_2\vec{w}) = (\vec{R}\vec{v}, \vec{w})$$

と (7.2) を用いて示すこともできます．ここで 49 ページの (2.21) を用いました．すなわち 2 次正方行列 A に対しては

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w}) \qquad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2) \tag{7.4}$$

が成立することを用いています．

演習 7.1. 次の計算をしましょう．
(1) $R_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$　**(2)** $R_{-\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

7.2　直交行列

回転行列 R は任意の $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \tag{7.5}$$

を満たします．逆に，2 次正方行列 P が任意の $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(P\vec{x}, P\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \tag{7.6}$$

を満たしているとします．このとき P はどのような行列になるかについて考えていきます．(7.4) を用いると

$$(P\vec{x}, P\vec{y}) = ({}^tPP\vec{x}, \vec{y})$$

が成立しますから (7.6) は

$$({}^tPP\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$$

と必要十分です．さらに式を整理して

$$(({}^tPP - I_2)\vec{x}, \vec{y}) = 0 \tag{7.7}$$

と必要十分です．ここで $\vec{a} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(\vec{a}, \vec{y}) = 0 \quad (\vec{y} \in \mathbf{R}^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \tag{7.8}$$

が成立しますから，任意の $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して (7.7) が成立することは

$$({}^tPP - I_2)\vec{x} = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^2)$$

が成立することと同値であることが分ります．さらに，2 次正方行列 $C \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$C\vec{x} = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^2) \quad \Longleftrightarrow \quad C = O_2 \tag{7.9}$$

が成立しますから，結局，任意の $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して (7.6) が成立することは

$${}^tPP = I_2 \tag{7.10}$$

と必要十分であることが証明できました．

さらに，(7.10) が成立するとき，

$$\det({}^tPP) = \det({}^tP)\det(P) = \det(P)^2 = \det(I_2) = 1$$

より

$$\det(P) = \pm 1 \tag{7.11}$$

が従います．これから P は正則であることが分り，

$${}^tP = P^{-1}$$

であることも分ります．そして

$$P\,{}^tP = PP^{-1} = I_2$$

が分ります．その結果

$${}^tPP = I_2 \Leftrightarrow {}^tPP = P\,{}^tP = I_2$$

が示されました．

定理 7.1. *2* 次正方行列 $P \in M_2(\mathbf{R})$ に対して次の条件 *(i), (ii), (iii), (vi)* は必要十分です（この条件を満たす *2* 次正方行列を直交行列といいます）．
(i) $(P\vec{x}, P\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \quad (\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2)$
(ii) $||P\vec{x}|| = ||\vec{x}|| \quad (\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^2)$
(iii) ${}^tPP = P\,{}^tP = I_2$
(iv) $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と列ベクトル表示をすると

$$||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

が成立する．

(証明) (i)⇒(ii) は (i) において $\vec{x}=\vec{y}$ とすれば従います.
(ii)⇒(i) は，一般に $\vec{x}$, $\vec{y}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{x}+\vec{y}||^2-||\vec{x}-\vec{y}||^2=4(\vec{x},\vec{y})$$

が成立することを用いれば証明できます.
(i) ⇔(iii) は上で証明しました.
　最後に (iii) ⇔(iv) を証明しましょう．$P=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ とすると

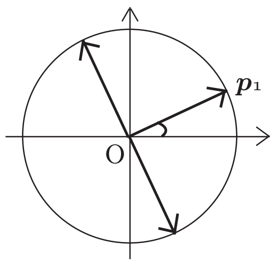
$${}^tPP=\begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \end{pmatrix}(\vec{p}_1\ \vec{p}_2)=\begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1\vec{p}_1 & {}^t\vec{p}_1\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_2\vec{p}_1 & {}^t\vec{p}_2\vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}{}^tPP=I_2 &\Leftrightarrow {}^t\vec{p}_1\vec{p}_1={}^t\vec{p}_2\vec{p}_2=1,\ {}^t\vec{p}_1\vec{p}_2=0\\ &\Leftrightarrow ||\vec{p}_1||=||\vec{p}_2||=1,\ (\vec{p}_1,\vec{p}_2)=0\end{aligned}$$

が分かります．これから (iii)⇔(iv) が従います．**(証明おわり)**

演習 7.2. (7.8) と (7.9) を証明してください.



　次に上の条件 (iv) を用いて，直交行列はどのような行列か考えてみましょう．$||\vec{p}_1||=1$ ですから,

$$\vec{p}_1=\begin{pmatrix}\cos\omega\\ \sin\omega\end{pmatrix}$$

と表示できます．すると，$||\vec{p}_2||=1$，$(\vec{p}_1,\vec{p}_2)=0$ ですから，$\vec{p}_2$ は $\vec{p}_1$ を $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転したものになります．このことから

$$\vec{p}_2=\begin{pmatrix}\cos(\omega\pm\frac{\pi}{2})\\ \sin(\omega\pm\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}-\sin\omega\\ \cos\omega\end{pmatrix}$$

と表示できます．以上で

$$P=\begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega\\ \sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}\quad \text{または}\quad \begin{pmatrix}\cos\omega & \sin\omega\\ \sin\theta & -\cos\omega\end{pmatrix}$$

と表示できることが分かりました．このそれぞれの行列の幾何学的な意味を考えましょう．

(i) 最初に

$$P = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

の場合を考えましょう．これは 7.1 節で考えた回転行列に他なりません．

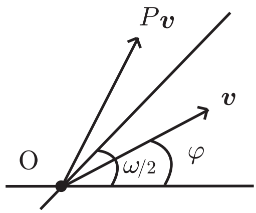
(ii)　次に

$$P = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}$$

の場合を考えましょう．そのための $r > 0$ として

$$\vec{v} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

に対して P を掛けます.



$$\begin{aligned} P\vec{v} &= \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix} \cdot r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} \cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi \\ \sin\omega\cos\varphi - \cos\omega\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} \cos(\omega-\varphi) \\ \sin(\omega-\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このとき $P\vec{v}$ は方向ベクトルが

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

である原点を通る直線に関して $\vec{v}$ を**折り返し**たものであることが分ります.

注意 7.1. P が直交行列とします．*194* ページの (7.11) で示しましたが

$$\det(P) = \pm 1$$

が成立します．*(i)*P が回転の場合

$$\det(P) = 1$$

となります．他方 *(ii)* P が折り返しの場合

$$\det(P) = -1$$

となります.

演習 7.3. P_1，P_2 が直交行列とします．P_1P_2 が直交行列であることを示しましょう．${}^tP_1 = P_1^{-1}$ も直交行列であることを示しましょう．

演習 7.4. $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ に対して Q^2 を考えて Q^{-1} を求めましょう．

演習 7.5. $\vec{p} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ を考えます．$\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ の $\vec{p}$ 方向への直交射影を

$$\vec{w} = (\vec{p}, \vec{v}) \cdot \vec{p}$$

と定めます．このとき

$$\vec{q} = \vec{v} - 2(\vec{v} - \vec{w}) = 2\vec{w} - \vec{v}$$

に対して

$$\vec{q} = Q\vec{v}$$

と $Q \in M_2(\mathbf{R})$ を用いて表されることを示しましょう．そして Q を求めましょう．

7.3　2 次形式

7.3.1　2 次形式

まず具体的な問題から考えていきます．

行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

は，条件 ${}^tA = A$ を満たすので**対称行列**と呼ばれます．この場合，必ず対角化可能で，しかも直交行列 P を用いて $P^{-1}AP = {}^tPAP$ が対角行列となるように対角化できます．

このことを示すために，まず A の固有値を求めます．そのために固有方程式

$$\begin{aligned} |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-2) - (-2)\times(-2) \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6) = 0 \end{aligned}$$

を解くと，$\lambda = 1, 6$ が固有値であることが分ります．それぞれの固有ベクトルを求めましょう．

<u>$\lambda = 1$ のとき</u>

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff 2x + y = 0$$

ですから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります．

<u>$\lambda = 6$ のとき</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x - 2y = 0$$

ですから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となります．

ここで

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$$

と定めると

$$||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

が成立しますから行列 P は直交行列です（この場合は回転行列になっています）．この P を用いると

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (1 \cdot \vec{p}_1\ 6 \cdot \vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

すなわち

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

と対角化できます．

なぜこのように，直交行列によって対角化するかについて説明します．それは，A が定める 2 次形式 $5x^2 + 4xy + 2y^2$ を考えるからです．すなわち

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

について考えます．演習 7.3（197）にあるように ${}^tP$ も直交行列ですから $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と定めると

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left({}^tPAP{}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \xi^2 + 6\eta^2\end{aligned}$$

が導かれます．

　このことを用いて，制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下で 2 次形式

$$5x^2 + 4xy + 2y^2$$

を最大化・最小化することを考えます．制約条件の $x^2 + y^2 = 1$ は

$$\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^2 = 1$$

とノルムを使って書くことができます．${}^tP$ が直交行列であることを用いると

$$\left\|\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|{}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^2 = 1$$

から，制約条件は (ξ, η) 座標で

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

と表されることが分かります．この制約条件を用いて $\xi^2 + 6\eta^2$ から ξ を消去すると

$$\xi^2 + 6\eta^2 = (1 - \eta^2) + 6\eta^2 = 1 + 5\eta^2 \geq 1$$

と制約条件の下で値が 1 以上となります．さらに，この不等式は $\eta = 0$，従って $\xi = \pm 1$ で等号が成立します．よって最小値は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\vec{p}_1$$

のときに 1 を取ります．次に η を消去します．すると

$$\xi^2 + 6\eta^2 = \xi^2 + 6(1 - \xi^2) = 6 - 5\eta^2 \ \leqq 6$$

と制約条件の下で値が 6 以下となります．さらに，この不等式は $\xi = 0$，従って $\eta = \pm 1$ で等号が成立します．よって最大値は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_2$$

のときに 6 を取ります．

演習 7.6. **(1)** 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を直交行列で対角化しましょう．
(2) 制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下で関数

$$z = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

の最小値・最大値を求めましょう．

演習 7.7. 以下の対称な $A \in M_2(\mathbf{R})$ を回転行列で対角化して，A が定める *2* 次形式を回転座標変換で簡単にしましょう．

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$　　**(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

以上の例を下に，一般的な 2 次の対称行列の対角化と 2 次形式について述べます．

対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

の固有方程式

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - b) - c^2 = \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab - c^2) = 0$$

の判別式は

$$D = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) = (a-b)^2 + c^2 \geqq 0$$

ですから，判別式は非負となります．従って，対称行列 A の固有値 α, β は実数となります．

$$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

さらに固有方程式が重根を持つ場合，すなわち $\alpha = \beta$ の場合を考えましょう．

$$D = 0 \Leftrightarrow a = b, \quad c = 0$$

ですから,

$$A = aI_2$$

を満たす a がなければ，言い換えれば A が単位行列の定数倍でなければ A の固有方程式は 2 相異実根

$$\alpha \neq \beta$$

を持つことが従います.

定理 7.2. **(i)** 対称行列 A の固有値 α, β は実数となります.
(ii) **(i)** において $\alpha = \beta$ となることと $A = aI_2$ となることとは必要十分です.

以下，$\alpha \neq \beta$ の場合だけを考えます．まず α と β の固有ベクトル $\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$ を取ります．このとき

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1, \quad A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2 \tag{7.12}$$

が成立します．このとき

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \tag{7.13}$$

が成立します．実際

$$(A\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{v}_1, A\vec{v}_2)$$

が ${}^tA = A$ から従いますが，さらに (7.12) から

$$(A\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad (\vec{v}_1, A\vec{v}_2) = \beta(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

が成立します．以上から

$$\alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \beta(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

が証明されました．$\alpha \neq \beta$ から (7.13) が従います．ここで $\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$ の方向の単位ベクトルを定めます．すなわち

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{||\vec{v}_1||}\vec{v}_1, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{||\vec{v}_2||}\vec{v}_2$$

とします．すると

$$||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

が成立しますから

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$$

は直交行列となります．さらに

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (\alpha\vec{p}_1 \ \beta\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

から

$$A = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}{}^tP$$

と直交行列で対角化することができます．ここで $\det(P) = 1$ のときは P は回転行列になります．また $\det(P) = -1$ のときは $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ の列ベクトルを用いて $R = (\vec{p}_1 \ \ -\vec{p}_2)$ と定めると R は $\det(R) = 1$ となりますから，回転行列であることが分かります．さらに

$$AR = R\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となりますから，対称行列 A は回転行列で対角化できることが分かります．

定理 7.3. 対称行列 A は直交行列（回転行列）P を用いて

$$A = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}{}^tP$$

と対角化できます．

次に A が定める 2 次形式

$$(A\vec{v}, \vec{v})$$

を考えます．これは

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と定めると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2cxy + by^2$$

と表示されます．ここで A の直交行列による対角化

$$A = PA_0{}^tP \quad ただし \quad A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を用います．すなわち

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = (PA_0{}^tP\vec{v}, \vec{v}) = ({}^tPPA_0{}^tP\vec{v}, {}^tP\vec{v}) = (A_0{}^tP\vec{v}, {}^tP\vec{v})$$

において $\vec{p} = {}^tP\vec{v}$ を

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と表示すると

$$\begin{aligned}(A\vec{v}, \vec{v}) &= (A_0{}^tP\vec{v}, {}^tP\vec{v}) = (A_0\vec{p}, \vec{p}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2\end{aligned}$$

が従います．ここで次の問題を考えます．

> **問題**
>
> $$x^2 + y^2 = 1$$
>
> の下で
>
> $$z = ax^2 + 2cxy + by^2$$
>
> の最大値，最小値を求める．

制約条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

は

$$||\vec{v}||^2 = 1$$

と同値ですから

$$||\vec{p}||^2 = ||{}^tP\vec{v}||^2 = ||\vec{v}||^2 = 1$$

が従います．これは

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

と必要十分です．以下

$$\alpha < \beta$$

として考えます．$\xi^2 = 1 - \eta^2$ を用いて ξ を消去すると

$$z = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 = \alpha(1 - \eta^2) + \beta\eta^2 = \alpha + (\beta - \alpha)\eta^2 \geqq \alpha$$

を得ます．この不等式において $\eta = 0$ 従って $\xi = \pm 1$ のとき等号が成立します．従って

$$\vec{v} = P\vec{p} = P\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\vec{p}_1$$

のときに最小値 α を取ることが示されました．

同様に，$\eta^2 = 1 - \xi^2$ を用いて η を消去すると

$$z = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 = \alpha\xi^2 + \beta(1-\xi^2) = \beta - (\beta-\alpha)\xi^2 \leqq \beta$$

を得ます．この不等式において $\xi = 0$ 従って $\eta = \pm 1$ のとき等号が成立します．従って

$$\vec{v} = P\vec{p} = P\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm\vec{p}_2$$

のときに最大値 β を取ることが示されました．

7.3.2　主成分分析

統計量をベクトルの内積やノルムで表現した**??**節の状況で考えます．対になっている変量 (x, y) のデータ

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3), \cdots, (x_N, y_N)$$

x_1	y_1
x_2	y_2
•	•
•	•
•	•
x_n	y_n

が与えられているとします．このとき，新たな変量

$$z = sx + ty$$

を定数 s と t を用いて定義すると，z の分散は**??**ページの (**??**) で示しましたが

$$\begin{aligned} V(z) &= s^2V(x) + 2stCov(x,y) + t^2V(y) \\ &= \left(C\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

と**分散共分散行列**，または単純に**分散行列**

$$C = \begin{pmatrix} V(x) & Cov(x,y) \\ Cov(x,y) & V(y) \end{pmatrix}$$

を用いて表示することができます．C は対称行列ですから，ある直交行列 P を用いて

$${}^tPCP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角化できます．これを用いると $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ を用いて $V(z)$ は

$$V(z) = \left({}^tPCP{}^tP\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, {}^tP\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

と標準形に変換できます．以下 $\alpha < \beta$ と仮定して[*1]，制約条件 $s^2 + t^2 = 1$ の下で $V(z)$ を最大化・最小化すると，前節の結果から

(i) $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \pm\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ において $V(z)$ は最小値 β を取り，**(ii)** $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \pm\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ において $V(z)$ は最大値 α を取ります．

統計学では，最大の分散を取る

$$z = p_{12}x + p_{22}y$$

のことを，**主成分**と呼びます．データの 2 次元散布図を描いたときに，バラツキが最大になる方向を知りたいときに主成分分析を行うことにも注意しましょう．

7.3.3　2 次形式の正定値・負定値

対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

が定める 2 次形式

$$z = f(x, y) = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

は，回転行列 P を用いた回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

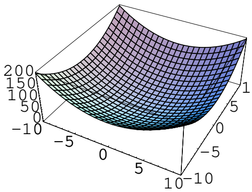
を用いて

$$z = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

と A の固有値 α と β で表すことができます．$z = f(x, y)$ のグラフの概形は，α と β の符号で次のようになります（ここでは，$\alpha\beta \neq 0$ の場合だけを示します)．

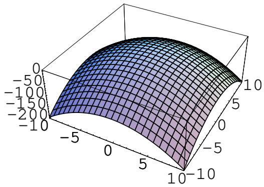
[*1] $\alpha = \beta$ の場合，C が対角行列となります．これは，x と y の相関係数が 0 の場合ですから，考える重要性がありません．

(i)



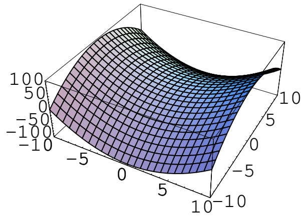
$\alpha,\ \beta > 0$

(ii)



$\alpha,\ \beta < 0$

(iii)



$\alpha\beta < 0$

上で説明した 3 つの場合に分けて考えていきます．そのために，A の固有多項式の計算

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + \det(A) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

から

$$a + b = \alpha + \beta, \quad \det(A) = ab - c^2 = \alpha\beta \tag{7.14}$$

に注意しましょう．このことから，$\det(A) \neq 0$ とすると，上の (i), (ii), (iii) のいずれか一つの場合に当てはまることが分かります（このとき，考える 2 次形式は**非退化**であるといいます）.

(i) $\alpha,\ \beta > 0$ の場合は,

$$ab = c^2 + \alpha\beta > 0,\ a + b = \alpha + \beta > 0$$

から $a, b > 0$ が成立します[*2]．また，$\det(A) = \alpha\beta > 0$ も成立します．また，このとき

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

が成立します.

(ii) $\alpha,\ \beta < 0$ の場合は,

$$ab = c^2 + \alpha\beta > 0,\ a + b = \alpha + \beta < 0$$

から $a, b < 0$ が成立します．また，$\det(A) = \alpha\beta > 0$ も成立します．また，このとき

$$(A\vec{v}, \vec{v}) < 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

[*2] $a, b \in \mathbf{R}$ に対して $a, b > 0 \Leftrightarrow a + b > 0, ab > 0$ であることを用いています.

が成立します.

(iii) $\alpha\beta < 0$ の場合は，$\det(A) = \alpha\beta < 0$ が成立します．簡単のために $\alpha > 0,\ \beta < 0$ とすると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ で与えられる固有ベクトル $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ で与えられる 2 つの方向に関して顕著なことが分かります．すなわち

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1$$

であるとき

$$z = (A\vec{v}, \vec{v}) = \alpha\xi^2$$

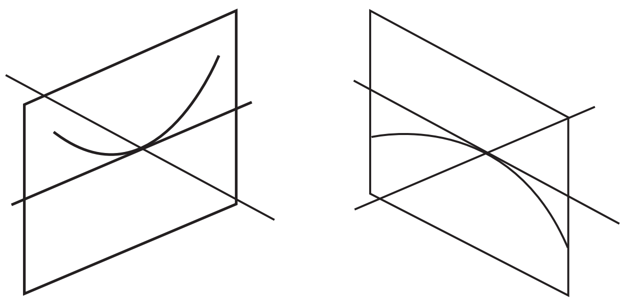
となり，他方

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \eta\vec{p}_2$$

であるとき

$$z = (A\vec{v}, \vec{v}) = \beta\eta^2$$

が成立します．この $\eta = 0$ の断面と $\xi = 0$ を下図に与えましょう.



以上の考察から，次を示すことができます.

定理 7.4. **(I)** 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

に対して以下の条件は同値です（このとき A が定める 2 次形式は正定値であるといいます）.

(i) A *が定める 2 次形式に対して*

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

が成立します.

(ii) A の固有値 α, β が $\alpha > 0$, $\beta > 0$ を満たします.

(iii) A は $\det(A) > 0$ かつ $a > 0$ を満たします.

(II) 上の対称行列 A に関して，以下の条件は同値です（このとき A が定める 2 次形式は負定値であるといいます）.

(i) A *が定める 2 次形式に対して*

$$(A\vec{v}, \vec{v}) < 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

が成立します.

(ii) A の固有値 α, β が $\alpha < 0$, $\beta < 0$ を満たします.

(iii) A は $\det(A) > 0$ かつ $a < 0$ を満たします.

定理 7.4 の **(I)** の場合を示しましょう.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) これは上で示されています.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) (7.14) で示した

$$a + b = \alpha + \beta, \quad \det(A) = ab - c^2 = \alpha\beta \tag{7.15}$$

を用います.

$$ab \geq ab - c^2 = \det(A) > 0$$

から $ab > 0$ が分かります．これと $a > 0$ から $b > 0$ が分かります.

$$\alpha + \beta = a + b > 0$$

と

$$\alpha\beta = \det(A) > 0$$

から $\alpha, \beta > 0$ が従います.

(i) $\Rightarrow$ (ii)　${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ と直交行列 P で対角化します．そして ${}^tP\vec{v} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ とします．このとき

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

となります．ここで ${}^tP\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ すなわち $\vec{v} = \vec{p}_1 \neq \vec{0}$ とすると

$$0 < (A\vec{p}_1, \vec{p}_1) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha$$

から $\alpha > 0$ が従います．他方 ${}^tP\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ すなわち $\vec{v} = \vec{p}_2 \neq \vec{0}$ とすると

$$0 < (A\vec{p}_2, \vec{p}_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = \beta$$

から $\beta > 0$ が従います．

(ii) $\Rightarrow$ (i) 上で $\alpha, \beta > 0$ とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \geq 0$$

が分かります．この不等式の等号成立条件[*3]は

$$\alpha\xi^2 = \beta\eta^2 = 0$$

すなわち $\xi = \eta = 0$ ですが，これは $\vec{v} \neq \vec{0}$ と必要十分条件です．よって

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

が示されました．

(iii) $\Rightarrow$ (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とします．このとき

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{v}) &= ax^2 + 2cxy + by^2 \\ &= a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

が $a > 0, ab - c^2 > 0$ から分かります．最後の不等式の等号成立条件は

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0$$

[*3] $a, b \in \mathbf{R}$ が $a, b \geq 0$ を満たすとき $a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ であることを用いています．

で、これは $x = y = 0$ と必要十分です．従って $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ならば

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0$$

であることが分かります．

(i) $\Rightarrow$ (iii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$\left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = a > 0$$

が従います．さらに，上で $\vec{v} = {}^t(-\frac{c}{a}\ 1) \neq \vec{0}$ とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \frac{ab - c^2}{a} > 0$$

から $ab - c^2 > 0$ も分かります．

演習 7.8. 対称行列 A が定める 2 次形式が正定値であるとします．このとき A が正則であることを確認して，A^{-1} が対称で A^{-1} が定める 2 次形式も正定値であることを示しましょう．

退化している場合

以上は，A が定める 2 次形式が非退化の場合でした．$\det(A) = \alpha\beta = 0$ の場合を考えます．この場合，少なくとも 1 個の固有値が 0 となります (両方の固有値が 0 の場合は，$A = O_2$ とゼロ行列になってしまいます)．ここでは $\alpha = 0$ かつ $\beta \neq 0$ の場合を考えます．この場合は

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1$$

であるとき

$$z = (A\vec{v}, \vec{v}) = \alpha\xi^2 = 0$$

となります．原点を通り $\vec{p}_1$ の方向の直線上，2 次形式が常にゼロになります．$\beta > 0$ の場合は

$$z = (A\vec{v}, \vec{v}) = \beta\eta^2 \geqq 0$$

となり，他方 $\beta < 0$ の場合は

$$z = (A\vec{v}, \vec{v}) = \beta\eta^2 \leqq 0$$

となります．

7.3.4　非負定値・非正定値

　対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ について考えます.

$$(A\vec{v}, \vec{v}) \geq 0 \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^2)$$

が成立するとき，A が定める 2 次形式は**非負定値**であるといいます．他方、

$$(A\vec{v}, \vec{v}) \leq 0 \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^2)$$

が成立するとき，A が定める 2 次形式は**非正定値**であるといいます．定理 7.4 と同様にこの性質は A の成分や行列式、または A の固有値で特徴付けができます.

定理 7.5. **(I)** 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ に対して次の条件はすべて必要十分です.
(i) A が定める 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$ は非負定値です.
(ii) A の固有値 α, β は $\alpha, \beta \geq 0$ を満たします.
(iii) $a, b \geq 0,\ \det(A) \geq 0$
(II) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ に対して次の条件はすべて必要十分です.
(i) A が定める 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$ は非正定値です.
(ii) A の固有値 α, β は $\alpha, \beta \leq 0$ を満たします.
(iii) $a, b \leq 0,\ \det(A) \geq 0$

　この定理 7.5 の証明は定理 7.4 とほぼ同様です．より具体的には (i)$\Leftrightarrow$ (ii) と (ii)$\Leftrightarrow$ (iii) は 2 つの定理の証明でほぼ同じです.

Gram 行列

　$B = (\vec{p}\ \vec{q})$ を $n \times 2$ 行列とします．このとき列ベクトルは

$$\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{R}^n$$

であることに注意しましょう．ここで

$$A = {}^tAA = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p} \\ {}^t\vec{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p} & \vec{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||\vec{p}||^2 & (\vec{p}, \vec{q}) \\ (\vec{q}, \vec{p}) & ||\vec{q}||^2 \end{pmatrix}$$

は 2 次の対称行列となります．この A を B が定める $Gram$ **行列**と呼びます．

$$(A\vec{v},\vec{v}) = ({}^tAA\vec{v},\vec{v}) = (A\vec{v},A\vec{v}) = \|A\vec{v}\|^2 \geq 0$$

から行列 A が定める 2 次形式は非負定値であることが分かります．より詳しくは以下の定理が成立します．

定理 7.6. $B = (\vec{p}\ \vec{q})$ を $n \times 2$ 行列とします．
(1) $A = {}^tBB$ が定める 2 次形式は非負定値です．
(2) $A = {}^tBB$ が定める 2 次形式が正定値である必要十分条件は $\vec{p}$ と $\vec{q}$ が平行でないことです．このとき A は正則になります．

（証明）(1) は証明しました．定理 7.5 から A の固有値 α,β は $\alpha,\beta \geq 0$ を満たすことに注意しましょう．
(2) 定理 7.4 を用いると，A が定める 2 次形式が正定値である必要十分条件は $\alpha,\beta > 0$ であることが分かります．

$$\det(A) = \alpha\beta \geq 0$$

が成立していますから、この条件は $\det(A) \neq 0$ すなわち A が正則であることと必要十分です．155 ページの (5.19) を用いるとこの条件は

$$\ker(A) = \{\vec{0}\}$$

すなわち

$$c_1\vec{p} + c_2\vec{q} = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

であることと必要十分です．

7.4　2 次曲線

平面の座標を (x,y) として，(x,y) の 2 次式

$$ax^2 + 2cxy + by^2 + dx + ey + f = 0 \tag{7.16}$$

を満たす点全体のことを，この 2 次式 (7.16) が定める 2 次曲線といいます．この 2 次曲線を平行移動座標変換と回転座標変換で簡単な形のものに変換することを考えます．2 次の項がない場合は考える必要はないですから

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \neq O_2$$

を仮定します．また

$$\mathbf{b} = (d\ e), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と定めます．このとき (7.16) は

$$(A\vec{v}, \vec{v}) + \mathbf{b}\vec{v} + f = 0$$

と表現できます．

まず 1 次の項を平行移動座標変換で消すことができるか考えます．すなわち

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

として

$$(A\vec{v}, \vec{v}) + \mathbf{b}\vec{v} + f = (A(\vec{v} - \vec{v}_0), (\vec{v} - \vec{v}_0)) + f' \tag{7.17}$$

が恒等的に成立するために $\vec{v}_0$ と f' を定めることができるかを考えます．(7.17) の右辺を展開すると

$$\begin{aligned}(A(\vec{v} - \vec{v}_0), (\vec{v} - \vec{v}_0)) + f' &= (A\vec{v}, \vec{v}) - (A\vec{v}, \vec{v}_0) - (A\vec{v}_0, \vec{v}) + (A\vec{v}_0, \vec{v}_0) + f' \\ &= (A\vec{v}, \vec{v}) - 2(A\vec{v}_0, \vec{v}) + (A\vec{v}_0, \vec{v}_0) + f'\end{aligned}$$

となりますから (7.17) は

$$(2A\vec{v}_0 + {}^t\mathbf{b}, \vec{v}) + f - f' - (A\vec{v}_0, \vec{v}_0) = 0$$

と必要十分です．これがすべての $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ に対して成立する条件は

$$2A\vec{v}_0 + {}^t\mathbf{b} = \vec{0}, \qquad f' = f - (A\vec{v}_0, \vec{v}_0)$$

です．

非退化の場合

(I) まず $\det(A) \neq 0$ の場合を考えます．このとき

$$\vec{v}_0 = -\frac{1}{2}A^{-1\,t}\mathbf{b}$$

と上の条件を満たす $\vec{v}_0$ を定めることができます．そこで

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

と座標を平行移動すると，与えられた 2 次曲線は

$$aX^2 + 2cXY + bY^2 + f' = 0$$

となります.

さらに 2 次の部分を回転座標変換によって，単純なものにします．A は対称行列ですから回転行列 $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$ によって

$$A = R \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} {}^tR$$

と対角化できます．$\det(A) \neq 0$ の場合を考えていますから,

$$\det(A) = \alpha\beta$$

を考えると

$$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$$

であることが分かります．ここで回転の行列 R によって

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^tR \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$aX^2 + 2cXY + bY^2 + f' = \alpha_1\xi^2 + \beta_2\eta^2 + f'$$

となります．以上をまとめると以下を得ます.

2 次曲線

$$ax^2 + 2cxy + by^2 + dx + ey + f = 0 \tag{7.18}$$

が与えられているとき $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{b} = (d\ e)$ と定めます.

$$\det(A) = ab - c^2 \neq 0$$

を仮定します．このとき

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\,{}^t\mathbf{b}$$

と

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を満たす回転行列 R によって、平行移動座標変換

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

と回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^tR \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

を合成して得られる座標 (ξ, η) を用いると，2 次曲線 (7.18) は

$$\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + f' = 0$$

と表せます．ここで α, β は A の固有値であり，

$$f' = f - ax_0^2 - 2cx_0y_0 - by_0^2$$

です.

ここでさらに場合を分けます.

(a) $\alpha\beta > 0$ のとき

(a-i) α と $-f'$ が同符号のとき

2 次曲線 (7.18) は楕円になります.

(a-ii) $f' = 0$ のとき

2 次曲線 (7.18) は 1 点 $(\xi,\eta)=(0,0)$ すなわち $(x,y)=(x_0,y_0)$ になります.

(a-iii) α と $-f'$ が異符号のとき

2 次曲線は空集合になります.

(b) $\alpha\beta<0$ のとき

(b-i) $f'\neq 0$ のとき

2 次曲線 (7.18) は双曲線になります.

(b-ii) $f=0$ のとき

2 次曲線 (7.18) は交わる 2 直線となります.

例 7.1. 2 次曲線

$$x^2-xy+y^2-2x+4y=0 \tag{7.19}$$

について考えます.

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=(-2\ 4),\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

とすると (7.19) は

$$(A\vec{v},\vec{v})+\mathbf{b}\vec{v}=0 \tag{7.20}$$

と表されます.

$$\vec{v}_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1\,t}\mathbf{b}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\ -\frac{10}{3}\end{pmatrix}$$

と

$$f'=f-(A\vec{v}_0,\vec{v}_0)=-\frac{28}{3}$$

から

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\vec{v}-\vec{v}_0=\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$

と平行座標変換をすると (7.19) は

$$\left(A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)-\frac{28}{3}=0$$

となります. さらに A を回転行列 $R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ で

$${}^tRAR=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

と対角化します．そして

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換をすると (7.19) は

$$\frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 - \frac{28}{3} = 0$$

と表されます.

退化している場合

(II) 次に $\det(A) = ab - c^2 = 0$ の場合を考えましょう．この場合，非退化の場合のように 1 次の項を消すことができません．それでも対称行列の A はある回転行列 R を用いて

$$A = R \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} {}^tR$$

と対角化できます．$\det(A) = 0$ を仮定していましたから,

$$\det(A) = \alpha\beta$$

を用いると

$$\alpha = 0 \text{ または } \beta = 0$$

が成立します．もし $\alpha = \beta = 0$ が成立すると

$$A = RO_2{}^tR = O_2$$

となりますから，仮定から α または β の一方が 0 で，他方が 0 でありません．ここで

$$\alpha \neq 0,\ \beta = 0$$

を仮定しましょう．このとき回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^tR \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = \epsilon_1\xi^2$$

と表示されます．このことから (ξ, η) 座標を用いると

$$\alpha\xi^2 + d'\xi + e'\eta + f = 0 \tag{7.21}$$

と表示されます．ここで場合を分けます．

(a) $e' = 0$ のとき (7.21) は

$$\alpha\xi^2 + d'\xi + f = 0$$

となりますが，この ξ に関する判別式

$$D = {d'}^2 - 4f\epsilon_1$$

に関してさらに場合分けが必要となります．

(a-i) $D > 0$ のとき，(7.21) は η 軸に平行な 2 直線となります．

(a-ii) $D = 0$ のとき，(7.21) は η 軸に平行な 1 直線となります．

(a-iii) $D < 0$ のとき，(7.21) は空集合となります．

(b) $e' \neq 0$ のとき (7.21) は

$$\eta = -\frac{\alpha}{e'}\xi^2 - \frac{d'}{e'} - \frac{f}{e'} \tag{7.22}$$

と，軸が η 軸に平行な放物線になります．

例 7.2. 2 次曲線

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x \tag{7.23}$$

を考えます. これは

$$(x+y)^2 - 8x \tag{7.24}$$

と変形します．ここで

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を用いると

$$\left(\sqrt{2}X\right)^2 - 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$$

すなわち

$$Y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(X + \sqrt{2})^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

と放物線であることが分かります．

演習 7.9. 次の 2次曲線を座標の平行移動と回転座標変換を用いて簡単にしましょう。

(1) $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + (2\sqrt{3} - 4)x + (\sqrt{3} - 4)y + (4 - \sqrt{3}) = 0$

(2) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 6y = 0$

(3) $2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32 = 0$

(4) $x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$

(5) $x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$

(6) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5y - 2 = 0$

第 8 章

固有値問題—3 次元の場合

8.1 基本的な補助定理

値を $\mathbf{K}$ にとる $B \in M_3(\mathbf{K})$ を考えます．次の定理 8.1 が 3 次元の固有値問題を考える基礎となります．

定理 8.1. 次の条件 *(i), (ii), (iii)* は必要十分です．
(i) B は正則です．
(ii) $B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3)$ と B を列ベクトル表示すると，$\vec{b}_1$，$\vec{b}_2$，$\vec{b}_3$ は 1 次独立になります．すなわち

$$c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_3\vec{b}_3 = \vec{0} \ \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \tag{8.1}$$

が成立します．
(iii) $\det(B) \neq 0$

Proof. **(i)⇒ (ii)** (8.1) は

$$B\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0}$$

と必要十分であることに注意しましょう．**(i)** を仮定すると $B\vec{c} = \vec{0}$ の両辺に B^{-1} を掛けて $\vec{c} = B^{-1}B\vec{c} = B^{-1}\vec{0} = \vec{0}$ となり，**(ii)** が従います．
(i)⇒ (iii)

$$\det(B)\det(B^{-1}) = \det(BB^{-1}) = \det(I_3) = 1$$

から $\det(B) \neq 0$ が従います．

(iii)⇒ (i) $\tilde{B}$ を B の余因子行列とするとき

$$B\tilde{B} = \tilde{B}B = \det(B)I_3$$

が成立しますから，$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\tilde{B}$ と逆行列を求めることができます．
(ii)⇒ (iii) 対偶の **NOT(iii)⇒ NOT(iii)** を証明します．そのために，$\det(B) = 0$ を仮定します．B の列ベクトル表示 $B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3)$ において $\vec{b}_1 = 0$ が成立するならば,

$$(\vec{0}\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\vec{0} + 0\cdot\vec{b}_2 + 0\cdot\vec{b}_3 = \vec{0}$$

から **NOT (ii)** が成立します．以下では $\vec{b}_1 \neq \vec{0}$ とします．このとき有限回の行基本変形によって

$$B \to \cdots \to B_0 = \left(\begin{array}{c|cc} b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ \hline 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{21} & c_{22} \end{array}\right)$$

と変形できます．ただしここで $b'_1 \neq 0$ となります．しかも $B\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow B_0\vec{v} = \vec{0}$ となり，ここで用いる行基本変形では行列式が 0 である性質は保たれますから

$$\det(B_0) = b'_1\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix} = 0$$

従って

$$\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix} = 0$$

となります．このことから，ある $\begin{pmatrix}y_0\\ z_0\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が

$$\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ z_0\end{pmatrix} = \vec{0}$$

を満たします．ここで

$$x_0 = -\frac{1}{b'_1}(b'_2 y_0 + b'_3 z_0)$$

と定めると，$\vec{v}_0 = {}^t(x_0\ y_0\ z_0) \neq \vec{0}$ で

$$B_0\vec{v}_0 = \vec{0}$$

を満たします．これは $B\vec{v}_0 = \vec{0}$ を意味しますから，**NOT (ii)** を導きました．　□

定理 8.1 の内容で次節以降で応用を展開しやすい形を系として掲げましょう．

系 8.1. $B \in M_3(\mathbf{K})$ に対して以下の **NOT(ii)** と **NOT(iii)** は必要十分です．
NOT(ii) ある $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して $B\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ が成立します．
NOT(iii) $\det(B) = 0$

注意 8.1. 系 *8.1* において，$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ のとき，すなわち B が実数値のときには **NOT (ii)** で $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ と実数値の非自明解がとれることに注意しましょう

8.2　固有値・固有ベクトル

3 次正方行列 $A \in M_3(\mathbf{K})$ を考えます．A の成分を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とします．ある $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ が存在して

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

が成立するとき，$\alpha \in \mathbf{K}$ は A の固有値であるといいます．そして $\vec{v}$ を固有値 α に対する固有ベクトルであるといいます．

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v} \Leftrightarrow (\alpha I_3 - A)\vec{v} = \vec{0}$$

であることに注意すると，$\alpha \in \mathbf{K}$ が A の固有値であることと

$$\det(\alpha I_3 - A) = 0$$

と必要十分であることが分かります（定理 8.1）．

ここで A の固有多項式を

$$\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \tag{8.2}$$

と定めます．固有多項式を定める行列式を少し展開していきます．すなわち

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) + \sum_{\sigma \neq id} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} b_{\sigma(3)3}$$

とします．ここで $\lambda I_3 - A = (b_{ij})$ と成分を表しています．この式で $\sigma \neq id$ であるとします．もし

$$j = \sigma(i) \neq i$$

とすると

$$\sigma(j) \neq \sigma(i) = j$$

となりますから，ある i 列で σ が非対角成分を選ぶと別の j 列でも非対角成分が選ばれます．したがって，固有多項式の $\sum_{\sigma \neq id}$ の部分は λ に関して 1 次以下の多項式となることが分かります．以上から

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) + (\lambda\text{の 1 次式})$$

であることが導かれました．さらに (8.2) において $\lambda = 0$ とすると

$$\det(-\vec{a}_1 \ \ -\vec{a}_2 \ \ -\vec{a}_3) = -\det(A)$$

から

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + c_1\lambda - \det(A) \tag{8.3}$$

と表されます．ここで

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

と A のトレース（跡）を定義します．また演習 8.1 または演習 8.2 によると

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{8.4}$$

となる[*1]ことも分かります．

演習 8.1. $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3)$ と列ベクトル表示をするとき

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 \ \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 \ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3|$$

において各列の線型性を用いて展開して (8.4) を示しましょう．

演習 8.2. $\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t)$ を 3 次元ベクトルに値をとる微分可能な関数とします．このとき

$$\frac{d}{dt}\left|\vec{a}(t) \ \vec{b}(t) \ \vec{c}(t)\right| = \left|\frac{d}{dt}\vec{a}(t) \ \vec{b}(t) \ \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t) \ \frac{d}{dt}\vec{b}(t) \ \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t) \ \vec{b}(t) \ \frac{d}{dt}\vec{c}(t)\right|$$

を示しましょう．これを用いて (8.4) を示しましょう．

[*1] ここに出てくる 2 次の小行列を 2 次の主小行列と呼びます．

8.3　対角可能な行列（十分条件）

8.3.1　行列の対角化

まず具体的な行列の固有値と固有ベクトルを求めて、その応用を考えていきます.

例 8.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ について考えましょう．A の固有多項式は

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-9)\lambda$$

ですから，固有値は $\lambda = -1,\ 0,\ 9$ となります．それぞれの固有値の固有ベクトルを求めましょう．

$\lambda = -1$ のとき 行基本変形

$$(-1)I_2 - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から，$\lambda = -1$ に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は,

$$x + y = 0,\ z = 0$$

を満たします．特に

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は固有ベクトルとなります.

<u>$\lambda = 0,\ 9$ のとき</u> 同様に

$$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は，それぞれの場合の固有ベクトルとなります．ここで $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ と定めると[*2]

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

から P は正則であることが分かります．さらに

$$\begin{aligned} A(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (-\vec{p}_1\ 0\cdot\vec{p}_2\ 9\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

が従います.[*3]

[*2] 実は，この状況で P が正則であることが一般的に証明されます（定理 8.2(227 ページ) を参照）．

[*3] 後にまとめますが，正方行列 A の固有方程式に重根がない場合，A は対角化可能です（定理 8.3）．

定理 8.2. $A \in M_3(\mathbf{K})$ とします．
(1) $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ が相異なるとします．そして $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{K}^3$ が条件

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1, \quad \vec{v}_1 \neq \vec{0}$$

$$A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 \neq \vec{0}$$

を満たすとします．このとき $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ は 1 次独立になります．
(2) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ が相異なるとします．そして $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbf{K}^3$ が条件

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1, \quad \vec{v}_1 \neq \vec{0}$$

$$A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 \neq \vec{0}$$

$$A\vec{v}_3 = \gamma\vec{v}_3, \quad \vec{v}_3 \neq \vec{0}$$

を満たすとします．このとき $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ は 1 次独立になります．

Proof. **(1)**

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{0} \tag{8.5}$$

が成立すると仮定します．この両辺に $(A - \alpha I_3)$ を掛けると

$$(A - \alpha I_3)\vec{v}_1 = \vec{0}, \quad (A - \alpha I_3)\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2 - \alpha\vec{v}_2 = (\beta - \alpha)\vec{v}_2$$

から

$$c_2(\beta - \alpha)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

が従います．$\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ から $c_2(\beta - \alpha) = 0$ を得ますが，$\beta \neq \alpha$ から $c_2 = 0$ となります．さらにこれを (8.5) に代入して得られる $c_1\vec{v}_1 = \vec{0}$ から $c_1 = 0$ も導けます．$\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ が仮定されているからです．
(2)

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0} \tag{8.6}$$

が成立すると仮定します．この両辺に $(A - \gamma I_3)$ を掛けると

$$c_1(\alpha - \gamma)\vec{v}_1 + c_2(\beta - \gamma)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

が従います．ここで **(1)** を用いると

$$c_1(\alpha - \gamma) = c_2(\beta - \gamma) = 0$$

となりますが，$\alpha-\gamma\neq 0$ と $\beta-\gamma\neq 0$ から $c_1=c_2=0$ が従います．さらにこれを (8.6) に代入すると $c_3\vec{v}_3=\vec{0}$ となりますが，$\vec{v}_3\neq\vec{0}$ から $c_3=0$ も従います． □

この定理 8.2 を用いると次の定理 8.3 に示すように，固有多項式が単純根しか持たないとき，行列が対角化できることが分かります．

定理 8.3. $A\in M_3(\mathbf{K})$ の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$$

が $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{K}$ と $\mathbf{K}$ に根を持ち，すべてが単純根であると仮定します．すなわち

$$\alpha\neq\beta,\ \beta\neq\gamma,\ \gamma\neq\alpha$$

が成立するとします．このとき正則な $P\in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$$

と A は対角化できます．

Proof. α,β,γ が A の固有値ですから対応する固有ベクトルが存在します．すなわち，$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\in\mathbf{K}^3$ が存在して

$$A\vec{v}_1=\alpha\vec{v}_1,\ A\vec{v}_2=\alpha\vec{v}_2,\ A\vec{v}_3=\alpha\vec{v}_3$$
$$\vec{v}_i\neq\vec{0}\quad(i=1,2,3)$$

が成立します．$P=(\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$ と定めると

$$\begin{aligned}AP&=(A\vec{v}_1\ A\vec{v}_2\ A\vec{v}_3)=(\alpha\vec{v}_1\ \beta\vec{v}_2\ \gamma\vec{v}_3)\\&=(\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．ここで定理 8.2 を用いると P は正則であることが分かります．従って

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$$

と A は対角化できます． □

8.3.2　部分空間の和と直和

この 8.3.2 節は次の 8.3.3 節の準備です．

以下では V_1, V_2, V_3 は $\mathbf{K}^3$ の部分空間とします．このとき

$$V_1 + V_2 := \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2;\ \vec{v}_1 \in V_1,\ \vec{v}_2 \in V_2\}$$
$$V_1 + V_2 + V_3 := \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3;\ \vec{v}_1 \in V_1,\ \vec{v}_2 \in V_2,\ \vec{v}_3 \in V_3\}$$

と定めます．このとき $V_1 + V_2$，$V_1 + V_2 + V_3$ は $\mathbf{K}^3$ の部分空間となります．実際，$\vec{x}, \vec{y} \in V_1 + V_2$ とすると

$$\vec{v}_1, \vec{w}_1 \in V_1,\ \vec{v}_2, \vec{w}_2 \in V_2$$

が存在して

$$\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\ \vec{y} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

と表せます．このとき

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \mu(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = (\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{w}_1) + (\lambda\vec{v}_2 + \mu\vec{w}_2)$$

において

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{w}_1 \in V_1,\ \lambda\vec{v}_2 + \mu\vec{w}_2 \in V_2$$

が成立しますから，$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V_1 + V_2$ が従います．以上から $V_1 + V_2$ が $\mathbf{K}^3$ の部分空間であることが示されました．$V_1 + V_2 + V_3$ については演習 8.3 にします．

演習 8.3. $V_1 + V_2 + V_3$ が $\mathbf{K}^3$ の部分空間であることを証明しましょう．

上で構成した部分空間 $V_1 + V_2$ は部分空間 V_1, V_2 の和，部分空間 $V_1 + V_2 + V_3$ は部分空間 V_1, V_2, V_3 の和と言います．さらに和が特別な性質を持つ場合が重要になります．すなわち

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}, \vec{v}_1 \in V_1, \vec{v}_2 \in V_2 \Longrightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = 0$$

が成立するとき $V_1 + V_2$ は直和であるといい $V_1 \oplus V_2$ と記します．さらに

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}, \vec{v}_1 \in V_1, \vec{v}_2 \in V_2, \vec{v}_3 \in V_3 \Longrightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = 0$$

が成立するとき $V_1 + V_2 + V_3$ は直和であるといい $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ と記します．この場合，$\vec{v} \in V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ が

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3$$
$$\vec{v}_i, \vec{w}_i \in V_i\ (i = 1, 2, 3)$$

と 2 通りに表されるとしたら

$$(\vec{v}_1 - \vec{w}_1) + (\vec{v}_2 - \vec{w}_2) + (\vec{v}_3 - \vec{w}_3) = \vec{0}$$

から

$$\vec{v}_1 = \vec{w}_1,\ \vec{v}_2 = \vec{w}_2,\ \vec{v}_3 = \vec{w}_3$$

が従います．要するに V_1, V_2, V_3 への分解が一意的になるということを意味します．実は固有ベクトルに関係して $\mathbf{K}^3$ の直和分解を構成できることを次の 8.3.3 節で説明します．

8.3.3　スペクトル分解

225 ページの例 8.1 の 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ に対して詳しく考察します．A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda + 1)\lambda(\lambda - 9)$$

で，固有値は $\lambda = -1, 0, 9$ でした．ここで

$$V(-1) := \ker(-I_3 - A),\ V(0) := \ker(A),\ V(9) = \ker(9I_3 - A)$$

と定めます．それぞれ固有値 $-1, 0, 9$ の固有空間と呼びます．このとき

$$\mathbf{K}^3 = V(-1) \oplus V(0) \oplus V(9) \tag{8.7}$$

が成立します．まず

$$\mathbf{K}^3 = V(-1) + V(0) + V(9)$$

であることを示します．すなわち，任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \tag{8.8}$$

を満たす $\vec{v}_1 \in V(-1),\ \vec{v}_2 \in V(0),\ \vec{v}_3 \in V(9)$ が存在することを示します．そのために A を対角化した行列

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

を用います．具体的には

$$V(-1) = \mathbf{K}\vec{p}_1,\ V(0) = \mathbf{K}\vec{p}_2,\ V(9) = \mathbf{K}\vec{p}_3$$

であることを用います．実際 c_1, c_2, c_3 を

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v}$$

によって定めると

$$\vec{v} = PP^{-1}\vec{v} = P\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3$$

から

$$\vec{v}_1 = c_1\vec{p}_1 \in V(-1),\ \vec{v}_2 = c_2\vec{p}_2 \in V(0),\ \vec{v}_3 = c_3\vec{p}_3 \in V(9)$$

と定めると (8.8) が従います．

次に $V(-1) + V(0) + V(9)$ が直和であることを示します．それは一般論をまとめた次の定理 8.4 から従います．

定理 8.4. $A \in M_3(\mathbf{K})$ とします．

(1) $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ は $\alpha \neq \beta$ を満たすとします．このとき $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{K}^3$ が

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1,\ A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2$$

を満たすならば

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$$

が成立します．

(2) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ は $\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha$ を満たすとします. このとき $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbf{K}^3$ が

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1,\ A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2,\ A\vec{v}_3 = \gamma\vec{v}_3$$

を満たすならば

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \vec{0}$$

が成立します．

Proof. **(1)** $\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{0}$ の両辺に $(A-\beta I_3)$ を掛けると

$$(\alpha-\beta)\vec{v}_1=\vec{0}$$

となりますが，$\alpha\neq\beta$ から $\vec{v}_1=\vec{0}$ が従います．$\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{0}$ ですから $\vec{v}_2=\vec{0}$ も従います．

(2) $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3=\vec{0}$ の両辺に $(A-\gamma I_3)$ を掛けると

$$(\alpha-\gamma)\vec{v}_1+(\beta-\gamma)\vec{v}_2=\vec{0}$$

となりますが $(\alpha-\gamma)\vec{v}_1,(\beta-\gamma)\vec{v}_2$ は **(1)** の条件を満たしますから

$$(\alpha-\gamma)\vec{v}_1=(\beta-\gamma)\vec{v}_2=\vec{0}$$

から

$$\vec{v}_1=\vec{v}_2=\vec{0}$$

を得ます．さらに $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3=\vec{0}$ から $\vec{v}_3=\vec{0}$ も成立します．

□

以上で例 8.1 で考えた対角化可能な 3 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$ に対して (8.7) すなわち

$$\mathbf{K}^3=V(-1)\oplus V(0)\oplus V(9) \tag{8.9}$$

を証明しました．これを A による $\mathbf{K}^3$ の**スペクトル分解**と呼びます．これについてさらに深めていきます．

任意の $\vec{v}\in\mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$$

を満たす $\vec{v}_1\in V(-1),\vec{v}_2\in V(0),\vec{v}_3\in V(9)$ が一意的に存在します．以下では $\vec{v}_i\ (i=1,2,3)$ を具体的に求めることを考えます．

多項式

$$f(\lambda):=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m\in\mathbf{K}[\lambda]$$

に対して

$$f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mI_3$$

と定めます．これを $\vec{v}_1$ に掛けると $A^k\vec{v}_1 = (-1)^k\vec{v}_1$

$$\begin{aligned} f(A)\vec{v}_1 &= a_0(-1)^m\vec{v}_1 + a_1(-1)^{m-1}\vec{v}_1 + \cdots + a_1(-1)\vec{v}_1 + a_0\vec{v}_1 \\ &= \big(a_0(-1)^m + a_1(-1)^{m-1} + \cdots + a_1(-1) + a_0\big)\,\vec{v}_1 \\ &= f(-1)\vec{v}_1 \end{aligned}$$

から

$$f(A)\vec{v}_1 = f(-1)\vec{v}_1$$

を得ます．同様に

$$f(A)\vec{v}_2 = f(0)\vec{v}_2, \quad f(A)\vec{v}_3 = f(9)\vec{v}_3$$

も成立します．ここで

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda-9)}{(-1)(-1-9)} = \frac{1}{10}\lambda(\lambda-9)$$

とすると

$$f_1(-1) = 1, f_1(0) = f_1(9) = 0$$

から

$$P_1 = f_1(A) = \frac{1}{10}A(A-9I_3)$$

として $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ に掛けると

$$P_1\vec{v} = 1\cdot\vec{v}_1 + 0\cdot\vec{v}_2 + 0\cdot\vec{v}_3 = \vec{v}_1$$

から

$$\vec{v}_1 = P_1\vec{v}$$

となります．同様に

$$f_2(\lambda) = \frac{(\lambda+1)(\lambda-9)}{(0+1)(0-9)} = -\frac{1}{9}(\lambda+1)(\lambda-9)$$

$$f_3(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda+1)}{9(9+1)} = \frac{1}{90}\lambda(\lambda+1)$$

を用いて

$$P_2 = f_2(A), \quad P_3 = f_3(A)$$

と定めると，

$$f_2(0) = 1,\ f_2(-1) = f_2(9) = 0$$

$$f_3(9) = 1,\ f_3(-1) = f_3(0) = 0$$

から

$$\vec{v}_2 = P_2\vec{v}, \quad \vec{v}_3 = P_3\vec{v}$$

が成立します．さらに P_1, P_2, P_3 が満たす等式をいくつか証明します．

分解 $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ から

$$\vec{v} = P_1\vec{v} + P_2\vec{v} + P_3\vec{v} = (P_1 + P_2 + P_3)\vec{v}$$

が任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して成立しますから

$$I_3 = P_1 + P_2 + P_3$$

が成立します．$\vec{v}_1$ を分解すると

$$P_1\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{0} + \vec{0}$$

ですから

$$P_1P_1\vec{v} = P_1\vec{v},\ P_2P_1\vec{v} = \vec{0},\ P_3P_1\vec{v} = \vec{0},$$

から

$$P_1^2 = P_1,\ P_1P_2 = O_3, P_1P_3 = O_3$$

が従います．これと同様に

$$P_iP_j = \begin{cases} P_i & (i = j) \\ O_3 & (i \neq j) \end{cases}$$

が示されます．

注意 8.2. 次の定理 *8.5* を用いると

$$f_1(\lambda) + f_2(\lambda) + f_3(\lambda) = 1$$

が恒等的に成立することが分かります．また，定理 *8.7(Cayley-Hamilton* の定理*)* を用いると

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda) = -\frac{1}{90}(\lambda + 1)\lambda(\lambda - 9) \cdot (\lambda - 9)$$

から

$$P_1P_2 = f_1(A)f_2(A) = -\frac{1}{90}\Phi_A(A) \cdot (A - 9I_3) = O_3$$

のように $P_iP_j = O_3$ $(i \neq j)$ が従います．さらに

$$P_1 = P_1(P_1 + P_2 + P_3) = P_1^2 + P_1P_2 + P_1P_3 = P_1^2$$

と $P_i^2 = P_i$ $(i = 1, 2, 3)$ も証明できます．

定理 8.5. $\alpha_i \in \mathbf{K}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, m)$ はお互いに異なるとします．すなわち

$$\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j)$$

とします．$\mathbf{K}$ 係数の多項式

$$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

が

$$f(\alpha_0) = f(\alpha_1) = \cdots = f(\alpha_m) = 0$$

が成立するとき

$$f(\lambda) = 0$$

が恒等的に成立します．

8.4　行列の三角化，Cayley–Hamilton の定理

$A \in M_n(\mathbf{C})$ とします．特に以下では $n = 2, 3$ の場合を考えます．

定理 8.6. **(行列の三角化)** ある $P \in M_3(\mathbf{C})$ に対して

$$P^{-1}AP$$

が三角行列となります．

Proof. $\underline{n = 2 \text{ のとき}}$に証明します．

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)$$

と固有多項式を 1 次式の積に分解します．固有値 α_1 に対応する固有ベクトルを $\vec{v}_1$ とします．

$$A\vec{v}_1 = \alpha_1 \vec{v}_1$$

この $\vec{v}_1$ を用いて $\mathbf{C}^2$ の基底を $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ と取って

$$P = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2)$$

と定めます．このとき

$$A\vec{v}_2 = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2$$

と基底を用いて $A\vec{v}_2$ を表現できます．以上から

$$AP = (\alpha_1 \vec{v}_1 \ \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2) = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

となります．ここで $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は基底なので 1 次独立であることに注意すると P は正則であることが分かります．以上で $n = 2$ の場合は証明できました．

$\underline{n = 3 \text{ のとき}}$を次に証明しましょう．

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

と固有多項式を 1 次式の積に分解します．固有値 α_1 に対応する固有ベクトルを $\vec{v}_1$ とします．

$$A\vec{v}_1 = \alpha_1 \vec{v}_1$$

この $\vec{v}_1$ を用いて $\mathbf{C}^3$ の基底を $\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$，$\vec{v}_3$ と取って

$$P_1 = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$$

と置きます[*4]．このとき

$$A\vec{v}_2 = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \beta_3\vec{v}_3$$
$$A\vec{v}_3 = \gamma_1\vec{v}_1 + \gamma_2\vec{v}_2 + \gamma_3\vec{v}_3$$

と $\mathbf{C}^3$ の基底を用いて $A\vec{v}_2$，$A\vec{v}_3$ を表現すると

$$\begin{aligned} AP_1 &= (\alpha_1\vec{v}_1\ \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \beta_3\vec{v}_3\ \gamma_1\vec{v}_1 + \gamma_2\vec{v}_2 + \gamma_3\vec{v}_3) \\ &= (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)\begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = P_1\begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります．ここで

$$A_2 = \begin{pmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

と定めると 正則な $Q_2 \in M_2(\mathbf{C})$ が存在して

$$Q_2^{-1}A_2Q_2$$

が三角行列となります．さらに

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & Q_2 \end{pmatrix}$$

と定めると P_2 は正則で

$$P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & Q_2^{-1} \end{pmatrix}$$

---

*4　例えば $\vec{v}_1 = {}^t(a\ b\ c)$ の第 1 成分が $a \neq 0$ を満たすとき

$$P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定めると P は正則となります．

が成立します．このとき

$$
\begin{aligned}
P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 &= P_2^{-1}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_2}} \\ 0 & & \end{array}\right)P_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Q_2^{-1}}} \\ 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_2}} \\ 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Q_2}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$Q_2^{-1}A_2Q_2$}} \\ 0 & & \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となります．最後に $P = P_1P_2$ と定めると $P^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}$ であり，

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$Q_2^{-1}A_2Q_2$}} \\ 0 & & \end{pmatrix}
$$

において，右辺は三角行列です．

□

注意 8.3. $A \in M_3(\mathbf{C})$ が

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \alpha_2 & * \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}
$$

と正則な $P \in M_3(\mathbf{C})$ によって三角化されたとします．このとき，

$$
\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-\alpha_1 & * & * \\ 0 & \lambda-\alpha_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha_3 \end{pmatrix} = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)
$$

から，三角化したときの対角成分は A の固有値が並ぶことが分かります．

注意 8.4. A が 3 次実正方行列であるとします．さらに A の固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が全て実数であるとします．このとき，正則な $P \in M_3(\mathbf{R})$ が存在して

$$
P^{-1}AP
$$

が三角行列となります．すなわち，実数値の行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ によって三角化できることになります．実際，例えば上の証明で $n = 3$ の場合を考えると α_1 に対応する固有ベクトル $\vec{v}_1$ は実ベクトルになり，$\vec{v}_2, \vec{v}_3$ が実ベクトルとして $\mathbf{R}^3$ の基底を定めます．そして A_2 の固有値は，上の注意 *8.3* にあるように α_2, α_3 であるからです．

行列の三角化の応用として **Cayley–Hamilton の定理**を与えます．その準備をまず行います．t の多項式

$$\varphi(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_{m-1} t + a_m \in \mathbf{K}[t]$$

と n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$\varphi(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \cdots + a_{m-1} A + a_m I_n$$

と定めます．

2 つの多項式 $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbf{K}[t]$ を考えます．

(i) $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ に対して

$$\varphi(A) = \varphi_1(A) + \varphi_2(A)$$

が成立します．

(ii) $\psi(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)$ に対して

$$\psi(A) = \varphi_1(A) \cdot \varphi_2(A)$$

が成立します．

さて以上の準備のもと次の定理を述べることができます．

定理 8.7. (Cayley-Hamilton の定理) 3 次正方行列 $A \in \mathbf{K}$ に対して

$$\Phi_A(A) = 0$$

が成立します．

Proof. 定理 8.6 によると正則な $P \in M_3(\mathbf{C})$ が存在して

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}$$

と三角化できます．このとき A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

と計算されます．さらに

$$
\begin{aligned}
A-\alpha I_3 &= P\begin{pmatrix}\alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}P^{-1} - P\alpha I_3 P^{-1} \\
&= P\left\{\begin{pmatrix}\alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha & * & * \\ 0 & \alpha & * \\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}\right\}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix}0 & * & * \\ 0 & \alpha-\beta & * \\ 0 & 0 & \alpha-\gamma\end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}
$$

が成立します．同様に

$$
A-\beta I_3 = P\begin{pmatrix}\alpha-\beta & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \gamma-\beta\end{pmatrix}P^{-1}
$$

$$
A-\gamma I_3 = P\begin{pmatrix}\alpha-\gamma & * & * \\ 0 & \beta-\gamma & * \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}
$$

となります．以上の準備のもとで

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(A) &= (A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)(A-\gamma I_3) \\
&= P^{-1}P(A-\alpha I_3)P^{-1}\cdot P(A-\beta I_3)P^{-1}\cdot P(A-\gamma I_3)P^{-1}P \\
&= P^{-1}\begin{pmatrix}0 & * & * \\ 0 & \alpha-\beta & * \\ 0 & 0 & \alpha-\gamma\end{pmatrix} \\
&\qquad \begin{pmatrix}\alpha-\beta & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \gamma-\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha-\gamma & * & * \\ 0 & \beta-\gamma & * \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P \\
&= P^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha-\gamma & * & * \\ 0 & \beta-\gamma & * \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P \\
&= P^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P = \boldsymbol{O}
\end{aligned}
$$

と証明されます． □

8.5　対角化可能な行列–非単純な固有値がある場合

8.5.1　対角化可能な場合

$A \in M_3(\mathbf{K})$ が対角化可能であるとします．すなわち，ある正則行列 $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

が成立するとします．このとき

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha_3 \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

となります．このことから対角化できる場合は，対角成分に重複を含めて 3 個の固有値が並ぶことが分かります.

8.5.2　3 重根の場合

まず $A \in M_3(\mathbf{K})$ で固有多項式が $\alpha \in \mathbf{K}$ を 3 重根とする場合，すなわち

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$$

である場合を考えます．もし A が対角化可能であるとすると，ある正則行列 $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_3$$

から

$$A = \alpha I_3$$

であることが分かります.

8.5.3　2 重根の場合

8.5.4　具体例から始めよう

例 8.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ について考えます．A の固有多項式は

$$\Phi_A = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 4 & 4 \\ -4 & \lambda + 7 & 4 \\ 4 & -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2 (\lambda - 1)$$

と計算されます．固有空間 $V(1)$ と $V(-3)$ の基底を求めましょう．

<u>$V(1)$ について</u>　行基本変形

$$I_3 - A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x & & + & z & = & 0 \\ & y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

が分かりますので，このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と固有空間 $V(1)$ のベクトルが表され，基底として

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れます．

<u>$V(-3)$ について</u>　行基本変形

$$-3I_3 - A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-3) \Leftrightarrow x - y - z = 0$$

が分かりますので，このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と $V(-3)$ のベクトルは表せます．そして

$$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ が $V(-3)$ の基底となります．

次に $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ と定めると P は正則となります．実際

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

とすると $V(1) \oplus V(-3)$ の直和の性質を用いると

$$c_1\vec{p}_1 = \vec{0},\ c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

となりますが，$\vec{p}_1$ が $V(1)$ の $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ が $V(-3)$ の基底であることから

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = 0$$

を得ます．以上から $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ が 1 次独立であることが分かりました．これは P が正則であることの必要十分条件です．

さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ \ -3\vec{p}_2\ \ -3\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

と A が対角化可能であることが示されました．

対角化可能な場合の必要十分条件

以下では $A \in M_3(\mathbf{K})$ が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$$

と $\alpha \neq \beta$ を満たす固有値 $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ を持ち，α が固有多項式の 2 重根である場合を考えます.

$$V(\alpha) = \ker(A - \alpha I_3),\ V(\beta) = \ker(A - \beta I_3)$$

と固有空間を定めます．α, β が固有値ですから

$$\dim V(\alpha) \geq 1, \quad \dim V(\beta) \geq 1$$

であることが分かります．実は

$$\boxed{1 \leq \dim V(\alpha) \leq 2, \quad \dim V(\beta) = 1}$$

となります．実際，もし $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in V(\alpha)$ が 1 次独立であるとすると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則となり

$$AP = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

から $P^{-1}AP = \alpha I_3$ となりますが,

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$$

となり仮定に矛盾します．よって

$$\dim V(\alpha) \leq 2$$

となります．同様にもし $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in V(\beta)$ が 1 次独立であるとすると，$\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ が $\mathbf{K}^3$ の基底となるように $\vec{q} \in \mathbf{K}^3$ を選ぶと $Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$ が正則となって

$$AQ = Q\begin{pmatrix} \beta & 0 & c_1 \\ 0 & \beta & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

と表示されますから，$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \beta & 0 & c_1 \\ 0 & \beta & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ となります．ところが

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{Q^{-1}AQ}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\beta & 0 & -c_1 \\ 0 & \lambda-\beta & -c_2 \\ 0 & 0 & \lambda-c_3 \end{vmatrix} = (\lambda-\beta)^2(\lambda-c_3)$$

となって矛盾が生じます．従って $\dim V(\beta) \leq 1$ であることが分かります．

次に以下の対角化可能性に関する判定条件を示します．

> A が対角化可能であることと
>
> $$V(\alpha) \oplus V(\beta) = \mathbf{K}^3 \tag{8.10}$$
>
> であることとは必要十分です．

証明に入る前に (8.10) について言い換えをしておきます．

$$V(\alpha) \oplus V(\beta) \subset \mathbf{K}^3$$

において等式が成立する必要十分条件は

$$\dim\left(V(\alpha) \oplus V(\beta)\right) = \dim(\mathbf{K}^3)$$

です．この左辺は

$$\dim\left(V(\alpha) \oplus V(\beta)\right) = \dim\left(V(\alpha)\right) + \dim\left(V(\beta)\right) = \dim\left(V(\alpha)\right) + 1$$

ですから，(8.10) と $\dim(V(\alpha)) = 2$ が必要十分であることが分かります．

A が対角化可能であるとしましょう．このとき $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成立します．このとき $P = \vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3$ と列ベクトル表示をすると $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ は 1 次独立で

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ A\vec{p}_2 = \alpha\vec{p}_2$$

から $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ が従います．これから $\dim V(\alpha) \geq 2$ となりますから，$\dim V(\alpha) \leq 2$ から

$$\dim V(\alpha) = 2$$

を得ます．これは (8.10) と必要十分です．

逆に (8.10) が成立するとします．このとき

$$\dim V(\alpha) = 2$$

となりますから，$\vec{p}_1, \vec{p}_2$ を $V(\alpha)$ の基底とします．さらに $\dim V(\beta) = 1$ ですから

$$V(\beta) = \mathbf{K}\vec{p}_3$$

となるように $V(\beta)$ の基底をとります．このとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は 1 次独立です．実際，

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

とすると，$V(\alpha) \oplus V(\beta)$ の直和であることから

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}, \quad c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

が従います．さらに $V(\alpha)$ と $V(\beta)$ の基底として $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ をとってきたのですから

$$c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

が従います．以上から $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ が正則であることが分かり，

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\alpha\vec{p}_1\ \alpha\vec{p}_1\ \beta\vec{p}_2) = P\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$$

から A が対角化可能であることが分かります．

さらに A の対角化可能性を言い換えます．

A が対角化可能である必要十分条件は

$$(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) = O_3 \tag{8.11}$$

が成立することです．

証明に入る前に，多項式 $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ に対して $P \in M_3(\mathbf{K})$ が正則であるとき

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$$

が成立することを復習しましょう．

A が対角化可能とします．このとき正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成立します．このとき $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$ に対して

$$P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

から $f(A) = O_3$ が従います．

逆に (8.11) が成立すると仮定します．

$$1 = \frac{\lambda - \beta}{\alpha - \beta} + \frac{\lambda - \alpha}{\beta - \alpha} \tag{8.12}$$

が恒等的に成立します．それは $\lambda = \alpha, \beta$ を代入して成立することから分かります (235 ページの定理 8.5)．

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda - \beta}{\alpha - \beta}, \quad f_2(\lambda) = \frac{\lambda - \alpha}{\beta - \alpha}$$

として

$$P_1 = f_1(A), \quad P_2 = f_2(A)$$

と定めます．このとき (8.12) から $I_3 = f_1(A) + f_2(A)$ から

$$I_3 = P_1 + P_2 \tag{8.13}$$

が成立します．ここで任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v}_1 = P_1\vec{v}, \quad \vec{v}_2 = P_2\vec{v}$$

と定めると (8.13) から

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

が従います．さらに

$$(A - \alpha I_3)\vec{v}_1 = (A - \alpha I_3) \cdot \frac{1}{\alpha - \beta}(A - \beta I_3)\vec{v} = O_3\vec{v} = \vec{0}$$

から $\vec{v}_1 \in V(\alpha)$ を得ます．同様に

$$(A - \beta I_3)\vec{v}_2 = (A - \beta I_3) \cdot \frac{1}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_3)\vec{v} = O_3\vec{v} = \vec{0}$$

から $\vec{v}_1 \in V(\beta)$ を得ます．以上から

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) + V(\beta)$$

を導きました．この右辺が直和 $V(\alpha) \oplus V(\beta)$ となるのは一般論から従います（定理 8.4(**1**)）．以上で示した

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

は A が対角化可能であることと必要十分条件です.

スペクトル分解

$A \in M_3(\mathbf{K})$ の固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$$

と分解され,．$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ が $\alpha \neq \beta$ を満たすとと仮定します．さらに A が対角化可能であるとします.

まず上で定めた行列 P_1 と P_2 について性質を調べます．P_1 と P_2 は

$$I_3 = P_1 + P_2$$

を満たしました．また

$$P_1P_2 = -\frac{1}{\alpha - \beta}(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) = O_3$$

から

$$P_1P_2 = O_3$$

が分かります．さらに $I_3 = P_1 + P_2$ の両辺に P_1 を掛けると

$$P_1 = P_1(P_1 + P_2) = P_1^2 + P_1P_2 = P_1^2$$

から $P_1^2 = P_1$ が従います．同様に $P_2^2 = P_2$ が分かります.

以上で次が示されました.

$$\boxed{I_3 = P_1 + P_2,\ P_1P_2 = P_2P_1 = O_3,\ P_1^2 = P_1,\ P_2^2 = P_2}$$

上では

$$\mathrm{Im}(P_1) \subset V(\alpha), \quad \mathrm{Im}(P_2) \subset V(\beta) \tag{8.14}$$

を示しました．実はこの包含関係は等号になります．まず上で示した

$$\mathbf{K}^3 = \mathrm{Im}(P_1) + \mathrm{Im}(P_2)$$

の右辺が直和であることを示します[*5] $\vec{w}_1 \in \mathrm{Im}(P_1), \vec{w}_2 \in \mathrm{Im}(P_2)$ が

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{0}$$

を満たすとします．このとき $\vec{w}_1 = P_1\vec{a}_1$，$\vec{w}_2 = P_2\vec{a}_2$ と書けますから

$$P_1\vec{w}_1 = P_1^2\vec{a}_1 = P_1\vec{a}_1 = \vec{w}_1,\ P_2\vec{w}_1 = P_2P_1\vec{a}_1 = O_3\vec{a}_1 = \vec{0}$$

同様に

$$P_2\vec{w}_2 = \vec{w}_2,\ P_1\vec{w}_2 = \vec{0}$$

が分かります．このことを用いると $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{0}$ の両辺に P_1 を掛けると

$$\vec{w}_1 = \vec{0}$$

が分かります．$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{0}$ にこれを代入すると $\vec{w}_2 = \vec{0}$ も従います．

以上で

$$\mathbf{K}^3 = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \mathrm{Im}(P_2)$$

を示しました．これから

$$3 = \dim \mathrm{Im}(P_1) + \dim \mathrm{Im}(P_2)$$

また (8.14) から

$$\dim \mathrm{Im}(P_1) \leq \dim V(\alpha), \quad \dim \mathrm{Im}(P_2) \leq \dim V(\beta)$$

が得られます．さらに

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

[*5] 以下では P_1 と P_2 の関係を用いる証明を与えます．$V(\alpha) \oplus V(\beta)$ の直和を用いると簡単に示せます．

から

$$\dim V(\alpha) + \dim V(\beta) = 3$$

が従います．以上をまとめると

$$3 = \dim \mathrm{Im}(P_1) + \dim \mathrm{Im}(P_2) \leq \dim V(\alpha) + \dim V(\beta) = 3$$

において中央の不等号が等号になることが分かります．それは

$$\dim \mathrm{Im}(P_1) = \dim V(\alpha), \quad \dim \mathrm{Im}(P_2) = \dim V(\beta)$$

が成立することと必要十分です．これは

$$\boxed{\mathrm{Im}(P_1) = V(\alpha), \quad \mathrm{Im}(P_2) = V(\beta) \qquad (8.15)}$$

であることを意味します.

第 9 章

直交行列と 2 次形式—3 次元の場合

9.1　直交行列

9.1.1　直交行列

3 次正方行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ が

$$ {}^tPP = P\,{}^tP = I_3 \tag{9.1}$$

を満たすとき P を**直交行列**と呼びます．この条件 (9.1) は 7.2 節（193 ページ）で学んだ 2 次元の場合と同様に次の定理 9.1 にあるように言い換えることができます．

定理 9.1. 3 次正方行列 P に対して次の条件 *(i), (ii), (iii), (vi)* は必要十分です．
(i) P は直交行列です．すなわち ${}^tPP = P\,{}^tP = I_3$ が成立します．
(ii) $(P\vec{x}, P\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \quad (\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^3)$
(iii) $||P\vec{x}|| = ||\vec{x}|| \quad (\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3)$
(iv) $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ と列ベクトル表示をすると

$$||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = ||\vec{p}_3|| = 1, \quad (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0\ (i \neq j)$$

が成立します．

証明をする前に ${}^tPP = I_3$ の両辺の行列式を考えると

$$\det({}^tPP) = \det({}^tP)\det(P) = \det(P)^2$$

から

$$\det(P)^2 = \det(I_3) = 1$$

が従います．よって

$$\det(P) = \pm 1$$

であることが分かります．このことから ${}^tPP = I_3$ が成立すると P は正則で

$$P^{-1} = {}^tP$$

さらには

$$P\,{}^tP = I_3$$

も従います．以上をまとめると P が直交である必要十分条件は

$${}^tPP = I_3$$

であることが分かります．

Proof. **(i)⇒ (ii)** ${}^tPP = I_3$ であることを用います．すなわち

$$(P\vec{x}, P\vec{y}) = ({}^tPP\vec{x}, \vec{y}) = (I_3\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$$

と (ii) が導かれます．
(ii)⇒ (i) まず

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad (\vec{y} \in \mathbf{R}^3) \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

であることに注意します．

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (P\boldsymbol{x}, P\vec{y}) = ({}^tPP\vec{x}, \vec{y})$$

から

$$(({}^tPP - I_3)\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

が任意の $\vec{y} \in \mathbf{R}^3$ に対して成立します．最初に述べた注意を用いると

$$({}^tPP - I_3)\vec{x} = \vec{0}$$

が任意の $\vec{x} \in \mathbf{R}$ に対して成立しますが、これは

$$ {}^tPP = I_3 $$

と必要十分です.

(ii)⇒ (iii)

$$ (\vec{x}, \vec{x}) = ||\vec{x}||^2 $$

ですから，(ii) において $\vec{x} = \vec{y}$ の場合を考えると (iii) が従います.

(iii)⇒ (ii)

$$ (\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}\left(||\vec{x}+\vec{y}||^2 - ||\vec{x}-\vec{y}||^2\right) $$

であることを用います.

(i)⇒ (iv)

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_3 \end{pmatrix} (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = \begin{pmatrix} ||\vec{p}_1||^2 & (\vec{p}_1, \vec{p}_2) & (\vec{p}_1, \vec{p}_3) \\ (\vec{p}_2, \vec{p}_1) & ||\vec{p}_2||^2 & (\vec{p}_2, \vec{p}_3) \\ (\vec{p}_3, \vec{p}_1) & (\vec{p}_3, \vec{p}_2) & ||\vec{p}_3||^2 \end{pmatrix} = I_3 $$

から

$$ ||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = ||\vec{p}_3|| = 1, \quad (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0\ (i \neq j) $$

が従います.

(iv)⇒ (i) **(i)⇒ (iv)** を逆にたどると分かります. □

3 次の直交行列全体の集合を**直交群**と呼んで

$$ O(3) := \{P \in M_3(\mathbf{R});\ {}^tPP = P{}^tP = I_3\} $$

と記します.

演習 9.1. $P_1, P_2 \in O(3)$ のとき $P_1P_2 \in O(3)$, $P_1^{-1} \in O(3)$ を示しましょう.

9.1.2 回転行列

3 次の直交行列 $P \in O(3)$ を考えます. 上で示したように

$$ \det(P) = \pm 1 $$

が従います. $R \in O(3)$ が

$$ \det(R) = 1 $$

を満たすとき R を 3 次の回転行列と呼びます．例えば

$$R_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

は z 軸の周りに角度 θ 回転する行列ですが，実際，$\det(R_0) = 1$ が成立しますから R_0 は 3 次の回転行列であることが分かります.

演習 9.2. (i) (9.2) の R_0 が 3 次の回転行列であることの条件を満たすことを示しましょう.
(ii) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$R_0\vec{a} \times R_0\vec{b} = R_0(\vec{a} \times \vec{b})$$

が成立することを示しましょう.

以下では

$$SO(3) := \{R \in O(3);\ \det(R) = 1\}$$

を 3 次の回転行列全体の集合[*1]とします.

演習 9.3. $R_1, R_2 \in SO(3)$ ならばその積について $R_1R_2 \in SO(3)$ が成立することを示しましょう．また $R_1^{-1} \in SO(3)$ も示しましょう.

以下では，3 次の回転行列 $R \in SO(3)$ を幾何学的に特徴付けます.

命題 9.1. $\det(R - I_3) = 0$ が成立します．従ってある $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$R\vec{x} = \vec{x}, \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

が成立します.

Proof.

$$\begin{aligned} \det(R - I_3) &= \det({}^tR - I_3) \\ &= \det(R^{-1} - I_3) \\ &= \det(R^{-1})\det(I_3 - R) \\ &= -\det(R - I_3) \end{aligned}$$

[*1] 特殊直交群 (Special Orthogonal Group) と呼びます.

から $\det(R - I_3) = 0$ が従います. □

演習 9.4. 上の命題 *9.1* において等号がなぜ成立するか考えましょう.

命題 9.1 の $\vec{x}$ を回転行列 R の**軸**と呼びます. 次の命題 9.2 では $R \neq I_3$ でない限り軸が 1 方向しかないことを示します.

命題 9.2. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^3$ は 1 次独立であるとします. このとき

$$R\vec{x} = \vec{x}, \quad R\vec{y} = \vec{y}$$

が成立するならば $R = I_3$ が成立します.

Proof. $\vec{x}, \vec{y}$ が生成する 2 次元の部分空間を

$$V = \mathbf{R}\vec{x} + \mathbf{R}\vec{y}$$

と定めます. このとき

$$\vec{u} \in V \Longrightarrow R\vec{u} = \vec{u}$$

が成立します. 実際 $\vec{u} = c_1\vec{x} + c_2\vec{y}$ と表されますから,

$$R\vec{u} = c_1 R\vec{x} + c_2 R\vec{y} = c_1\vec{x} + c_2\vec{y} = \vec{u}$$

となるからです. 次に

$$z \in V^{\perp} \Longrightarrow R\vec{z} \in V^{\perp}$$

を示します. 実際, $\vec{u} \in V$ とすると $R\vec{u} = \vec{u}$ が成立しますから

$$\begin{aligned}(R\vec{z}, \vec{u}) &= (R\vec{z}, R\vec{u}) \\ &= (\vec{z}, \vec{u}) = 0\end{aligned}$$

から $Rz \in V^{\perp}$ が分かります.

$\mathbf{R}^3$ の部分空間 V の基底として $\vec{x}, \vec{y}$ が取れます. さらに $V^{\perp}$ の次元は 1 次元となりますので, $\vec{z} \neq \vec{0}$ である $\vec{z} \in V^{\perp}$ が $V^{\perp}$ の基底となります. このとき

$$R\vec{z} \in V^{\perp}$$

から

$$R\vec{z} = \gamma\vec{z}$$

を満たす $\gamma \in \mathbf{R}$ が存在します．$Q = (\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})$ は正則で

$$RQ = (\vec{x}\ \vec{y}\ \gamma\vec{z}) = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

から

$$Q^{-1}RQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

が成立します．この両辺の行列式を考えると

$$1 = \det(R) = \det(Q^{-1}RQ) = \gamma$$

から $R = I_3$ であることが分かります．　□

以下では $R \in SO(3)$ が $R \neq I_3$ を満たすとします．単位ベクトル $\vec{u}_1$ が

$$R\vec{u}_1 = \vec{u}_1$$

を満たすとします．次に

$$\det(\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3) = 1$$

を満たす $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ を取ります．一般に $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ に対して $(\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3)$ は直交行列となりますから（定理 9.1），

$$\det(\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3) = \pm 1$$

となります．もし $\det(\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3) = -1$ のときは

$$U = (\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \ -\vec{u}_3)$$

と定義すると $\det(U) = 1$ となります．

この状況で

$$(R\vec{u}_2, \vec{u}_1) = (R\vec{u}_2, R\vec{u}_1) = (\vec{u}_2, \vec{u}_1) = 0$$

から $R\vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$ が分かります．同様に $R\vec{u}_3 \perp \vec{u}_1$ も成立します．従って

$$R\vec{u}_2, R\vec{u}_3 \in \mathbf{R}\vec{u}_2 + \mathbf{R}\vec{u}_3$$

から

$$RU = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

となります．ここで

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと

$$1 = \det(R) = \det(U^{-1}RU) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = \det(S)$$

から $\det(S) = 1$ が分かります．また $R_0 = U^{-1}RU$ が直交行列ですから

$$I_3 = {}^tR_0R_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{${}^tS$}} \\ 0 & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{S}} \\ 0 & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{${}^tSS$}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

従って ${}^tSS = I_2$ が分かります．同様に $R_0{}^tR_0 = I_3$ から $S{}^tS = I_2$ も従います．以上で

$$\det(S) = 1, \quad {}^tSS = S{}^tS = I_2$$

が成立しますから

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を満たす $\theta \in \mathbf{R}$ が存在します．以上で

$$U^{-1}RU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

であることが分かります．

定理 9.2. $R \in SO(3)$ が $R \neq I_3$ を満たすならば，ある $U \in SO(3)$ が存在して

$$U^{=1}RU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となります．

この定理 9.2 によると，$R \in SO(3)$ は軸による回転であることが分かります．

演習 9.5. **(1)** $\vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を含む $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底 $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ を求めましょう．

(2) $\vec{f_1}$ を軸として $\frac{\pi}{3}$ 回転する行列 R を求めましょう．すなわち $U = (\vec{f_1}\ \vec{f_1}\ \vec{f_3})$ による回転座標変換をして表現すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる回転行列 R を求めましょう．

演習 9.6. $R = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ が回転行列であることを示し，軸を求めてどのような回転を与えるか示しましょう．

9.1.3　直交射影と鏡映

直交射影

V を $\mathbf{R}^3$ の 2 次元部分空間とします．V を指定するにはいろいろな方法がありますが，ここでは大きさが 1 のベクトル $\vec{p}_1 \in \mathbf{R}^3$ に垂直なベクトルの集合として表します.

$$V = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{v}, \vec{p}_1) = 0\}$$

例えば

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ x - y + z = 0 \right\}$$

と表されます.

一般に V の正規直交基底を求めることができます．具体的に上の例で考えると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$$

とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から V の基底として

$$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を取ることができます．この 2 本のベクトルに対して Gram–Schmidt の直交化を用いると V の正規直交基底として

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が求まります．

$\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の V への直交射影 $\vec{v}_0$ とは

$$\vec{v}_0 \in V, \quad (\vec{v} - \vec{v}_0) \perp V \tag{9.3}$$

を満たすベクトルです．具体的には，V の正規直交基底 $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ を用いると

$$\vec{v}_0 = (\vec{p}_2, \vec{v})\vec{p}_2 + (\vec{p}_3, \vec{v})\vec{p}_3 \tag{9.4}$$

と表されます．実際，$\vec{p}_2, \vec{p}_3$ が V の基底ですから，

$$\vec{v}_0 = \eta\vec{p}_2 + \zeta\vec{p}_3$$

と表されます．このとき

$$(\vec{v} - \vec{v}_0, \vec{p}_2) = (\vec{v} - \vec{v}_0, \vec{p}_3) = 0$$

から

$$(\vec{v} - \eta\vec{p}_2 - \zeta\vec{p}_3, \vec{p}_2) = (\vec{v}, \vec{p}_2) - \eta(\vec{p}_2, \vec{p}_2) - \zeta(\vec{p}_3, \vec{p}_2) = (\vec{v}, \vec{p}_2) - \eta = 0$$
$$(\vec{v} - \eta\vec{p}_2 - \zeta\vec{p}_3, \vec{p}_3) = (\vec{v}, \vec{p}_3) - \eta(\vec{p}_2, \vec{p}_3) - \zeta(\vec{p}_3, \vec{p}_3) = (\vec{v}, \vec{p}_3) - \zeta = 0$$

から $\vec{v}_0$ が (9.4) と表されることが従います．このとき，V の任意のベクトル $\vec{q} \in V$ は

$$\vec{q} = c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3$$

と表されますから，$\vec{v}_0$ が

$$(\vec{v} - \vec{v}_0, \vec{p}_2) = (\vec{v} - \vec{v}_0, \vec{p}_3) = 0$$

を満たすことを用いると

$$(\vec{v}-\vec{v}_0, \vec{q}) = (\vec{v}-\vec{v}_0, c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3) = c_2(\vec{v}-\vec{v}_0, \vec{p}_2) + c_3(\vec{v}-\vec{v}_0, \vec{p}_3) = 0$$

から

$$\vec{v}-\vec{v}_0 \perp V$$

も分かります．これから (9.4) で定める $\vec{v}_0$ が $\vec{v}$ の V への正射影であることが分かります.

次に行列を用いて $\vec{v}_0$ を表すことを考えます．$(\vec{p}_1, \vec{v})$, $(\vec{p}_2, \vec{v})$ を 1×1 行列，$\vec{p}_2, \vec{p}_3$ を 3×1 行列と考えれば

$$\begin{aligned}
\vec{v}_0 &= \vec{p}_2 \cdot (\vec{p}_2, \vec{v}) + \vec{p}_3 \cdot (\vec{p}_2, \vec{v}) \\
&= \vec{p}_2 \cdot {}^t\vec{p}_2\vec{v} + \vec{p}_3 \cdot {}^t\vec{p}_2\vec{v} \\
&= \left(\vec{p}_2 \cdot {}^t\vec{p}_2 + \vec{p}_3 \cdot {}^t\vec{p}_2\right)\vec{v}
\end{aligned}$$

と 3 次正方行列

$$Q = \vec{p}_2 \cdot {}^t\vec{p}_2 + \vec{p}_3 \cdot {}^t\vec{p}_2$$

を用いて

$$\vec{v}_0 = Q\vec{v}$$

と表せます.

今度は直交行列 $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ を用いた座標変換で $Q\vec{v}$ がどのように表現されるか考えてみましょう．(9.4) を用いると

$$\begin{aligned}
Q\vec{p}_1 &= (\vec{p}_2, \vec{p}_1)\vec{p}_2 + (\vec{p}_3, \vec{p}_1)\vec{p}_3 = \vec{0} \\
Q\vec{p}_2 &= (\vec{p}_2, \vec{p}_2)\vec{p}_2 + (\vec{p}_3, \vec{p}_2)\vec{p}_3 = \vec{p}_2 \\
Q\vec{p}_3 &= (\vec{p}_2, \vec{p}_3)\vec{p}_2 + (\vec{p}_3, \vec{p}_3)\vec{p}_3 = \vec{p}_3
\end{aligned}$$

であることに注意しましょう．ここで

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を座標変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

を用いて変数変換すると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\xi'\\\eta'\\\zeta'\end{pmatrix} &= {}^tP\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = {}^tPQ\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = {}^tPQP\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\\ &= {}^tP(Q\vec{p}_1\ Q\vec{p}_2\ Q\vec{p}_3)\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix} = {}^tPP\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．このことから

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\xi'\\\eta'\\\zeta'\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}{}^tP\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

となり

$$Q = P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}{}^tP$$

とも表されます．さらに，これからも

$$\begin{aligned}Q\vec{v} &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}^t\vec{p}_1\\{}^t\vec{p}_2\\{}^t\vec{p}_3\end{pmatrix}\vec{v}\\ &= (\vec{0}\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}{}^t\vec{p}_1\vec{v}\\{}^t\vec{p}_2\vec{v}\\{}^t\vec{p}_3\vec{v}\end{pmatrix}\\ &= \vec{p}_2{}^t\vec{p}_2\vec{v} + \vec{p}_3{}^t\vec{p}_3\vec{v} = \left(\vec{p}_2{}^t\vec{p}_2 + \vec{p}_3{}^t\vec{p}_3\right)\vec{v}\end{aligned}$$

と上で示した表現が再び導けます．

最後に上で求めた

$$\vec{v}_0 = (\vec{p}_2, \vec{v})\vec{p}_2 + (\vec{p}_3, \vec{v})\vec{p}_3 = \left(\vec{p}_2{}^t\vec{p}_2 + \vec{p}_3{}^t\vec{p}_3\right)\vec{v} \tag{9.5}$$

と異なる $\vec{v}_0$ の表現を求めましょう．

まず $\vec{v}$ の $\vec{p}_1$ 方向への直交射影を $\vec{v}_1$ とすると

$$\vec{v}_1 = (\vec{p}_1, \vec{v})\vec{p}_1$$

となります．以下では $\vec{v}-\vec{v}_1$ が $\vec{v}_0$ に他ならないことを導きます．そのために $\vec{v}-\vec{v}_1$ が条件 (9.3) を満たすことを示します．

$$(\vec{v}-\vec{v}_1,\vec{p}_1)=(\vec{v},\vec{p}_1)-(\vec{p}_1,\vec{v})\cdot(\vec{p}_1,\vec{p}_1)=(\vec{v},\vec{p}_1)-(\vec{p}_1,\vec{v})=0$$

から $\vec{v}-\vec{v}_1\in V$ が分かります．また

$$\vec{v}-(\vec{v}-\vec{v}_1)=\vec{v}_1$$

に注意すると

$$\begin{aligned}(\vec{v}_1,\vec{p}_2)&=(\vec{p}_1,\vec{v})(\vec{p}_1,\vec{p}_2)=0\\(\vec{v}_1,\vec{p}_3)&=(\vec{p}_1,\vec{v})(\vec{p}_1,\vec{p}_3)=0\end{aligned}$$

から

$$\vec{v}-(\vec{v}-\vec{v}_1)=\vec{v}_1\perp V$$

が従います．よって

$$\vec{v}_0=\vec{v}-\vec{v}_1=\vec{v}-(\vec{p}_1,\vec{v})\vec{p}_1=\left(I_3-\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1\right)\vec{v}$$

から

$$Q=I_3-\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1$$

が分かります．以上で与えた Q の異なる表現は，P が直交行列であることから相互に導くことができます．実際，P が

$$P^tP=I_3$$

を満たすことを列ベクトルで表現した

$$\begin{aligned}\vec{v}=P^tP\vec{v}&=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}{}^t\vec{p}_1\vec{v}\\{}^t\vec{p}_2\vec{v}\\{}^t\vec{p}_3\vec{v}\end{pmatrix}\\&=\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1\vec{v}+\vec{p}_2{}^t\vec{p}_2\vec{v}+\vec{p}_3{}^t\vec{p}_3\vec{v}\\&=\left(\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1+\vec{p}_2{}^t\vec{p}_2+\vec{p}_3{}^t\vec{p}_3\right)\vec{v}\end{aligned}$$

を導くと得られる

$$I_3=\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1+\vec{p}_2{}^t\vec{p}_2+\vec{p}_3{}^t\vec{p}_3 \tag{9.6}$$

を用います．

演習 9.7. $\vec{p}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}{}^t(2\ \ -1\ 1)$ を法線方向として持つ 2 次元部分空間

$$V:=\{\vec{v}\in\mathbf{R}^3;\ (\vec{v},\vec{p}_1)=0\}$$

への直交射影を表す行列を求めましょう．

鏡映

V に関する $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の鏡映を

$$S\vec{v} = -(\vec{p}_1, \vec{v})\vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{v})\vec{p}_2 + (\vec{p}_3, \vec{v})\vec{p}_3 \tag{9.7}$$

で定義します．これは

$$\begin{aligned} S\vec{v} &= \left(-\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1 + \vec{p}_2{}^t\vec{p}_2 + \vec{p}_3{}^t\vec{p}_3\right)\vec{v} \\ &= \left(I_3 - 2\vec{p}_1{}^t\vec{p}_1\right)\vec{v} \end{aligned}$$

とも表せます．また $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ 座標では

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を変数変換すると

$$S\vec{p}_1 = -\vec{p}_1, \quad S\vec{p}_2 = \vec{p}_2, \quad S\vec{p}_3 = \vec{p}_3$$

を用いて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} &= {}^tPSP \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = {}^tP(S\vec{p}_1\ S\vec{p}_2\ S\vec{p}_3) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\ &= {}^tP(-\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\ &= {}^tPP \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せます．

最後に S が直交行列であることを示します．それは

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

から

$$S = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP$$

が得られますが，右辺の行列がすべて直交行列であることから分かります．さらに

$$\det(S) = \det(P) \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \det({}^tP) = -1$$

も分かります．

ここでは証明しませんが，実は 3 次の直交行列で行列式が -1 であるものは，$-I_3$ を除いて鏡映で表されます．

定理 9.3. $S \in O(3)$ が

$$\det(S) = -1, \quad S \neq -I_3$$

と仮定すると，ある単位ベクトル $\vec{p}_1 \in \mathbf{R}^3$ が存在して S が

$$V = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{v}, \vec{p}_1) = 0\}$$

に関する鏡映として表されます．

演習 9.8. $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}{}^t(2\ \ -1\ 1)$ を法線方向として持つ 2 次元部分空間

$$V := \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{v}, \vec{p}_1) = 0\}$$

に関する鏡映を表す行列を求めましょう．

演習 9.9. 定理 *9.3* を証明しましょう．

9.2 実対称行列の対角化

定理 9.4.（実対称行列の固有値は実数） A を 3 次の実対称行列とします．このとき固有多項式 $\Phi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$ の 3 根はすべて実数となります．

Proof. $\lambda = \alpha + i\beta$ が A の固有値とします．ただし，ここで $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ とします．このときある複素ベクトル $\vec{z} = \vec{a} + i\vec{b} \in \mathbf{C}^3$ $(\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3)$ が存在して

$$A\vec{z} = (\alpha + i\beta)\vec{z}, \quad \vec{z} \neq \vec{0}$$

が成立します．$\vec{z} \neq \vec{0}$ ですから

$$\vec{a} \neq \vec{0} \text{ または } \vec{b} \neq \vec{0}$$

となることに注意しましょう．$A\vec{z} = (\alpha + i\beta)\vec{z}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと

$$A\vec{a} + iA\vec{b} = (\alpha + i\beta)(\vec{a} + i\vec{b}) = (\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}) + i(\beta\vec{a} + \alpha\vec{b})$$

となりますが，最左辺と最右辺の実部と虚部を比べると

$$A\vec{a} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \quad A\vec{b} = \beta\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

が従います．これを $A = {}^tA$ から得られる

$$(A\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, A\vec{b})$$

に代入すると

$$(\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \vec{b}) = (\vec{a}, \beta\vec{a} + \alpha\vec{b})$$

から

$$\beta\left(||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2\right) = 0$$

が従います．$||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 \neq 0$ ですから $\beta = 0$ すなわち $\lambda \in \mathbf{R}$ であることが分かります． □

定理 9.5.（実対称行列は直交行列で対角化可能） A を 3 次の実対称行列とします．

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

と 3 次の直交行列 P によって対角化されます．

Proof.（**証明**）以下 3 次の実対称行列 A の固有値を α_1, α_2, α_3 とします．固有値 α_1 の固有ベクトル $\vec{p}_1 \in \mathbf{R}^n$ をとります．初めから $\vec{p}_1$ が $||\vec{p}_1|| = 1$ を満たすとしてよいことが分かります．この $\vec{p}_1$ を用いて $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底 $\vec{p}_1, \vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ を取ることができます．そして直交行列を $P_1 = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ と定めます．このとき

$$AP_1 = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\alpha_1\vec{p}_1\ \ *\ \ *) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\left(\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & * & * \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_2}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

を得ます．ここで $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ が $\mathbf{R}^3$ の基底であることから

$$A\vec{p}_i = c_{1i}\vec{p}_1 + c_{2i}\vec{p}_2 + c_{3i}\vec{p}_3 \quad (i = 2, 3)$$

と表わされることを用いました．さらに P_1 は直交行列ですから

$${}^tP_1AP_1 = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & * & * \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_2}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

が導かれます．この左辺の ${}^tP_1AP_1$ は ${}^t\left({}^tP_1AP_1\right) = {}^tP_1{}^tA^{tt}P_1 = {}^tP_1AP_1$ から対称行列であることが分かります．このことから

$${}^tP_1AP_1 = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_2}} \\ 0 & & \end{array}\right) \tag{9.8}$$

となり，A_2 が 2 次の実対称行列であることが分かります．このとき 2 次の直交行列 Q_2 が存在して

$${}^tQ_2A_2Q_2 = \begin{pmatrix} \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

と対角化できます．ここで

$$P_2 := \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Q_2}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

は直交行列であることから，$P = P_1P_2$ と定めると P は直交行列となり

$$\begin{aligned} {}^tPAP &= {}^tP_2\left({}^tP_1AP_1\right)P_2 \\ &= {}^tP_2\left(\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_2}} \\ 0 & & \end{array}\right)P_2 = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{${}^tQ_2A_2Q_2$}} \\ 0 & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と A が直交行列 P を用いて対角化されることが分かります．　□

次に具体例について考えますが，そのときに以下の定理が有用となります．

定理 9.6.（実対称行列の異なる固有値の固有ベクトルは直交） A を n 次の実対称行列とします．A の相異なる固有値 α と β があるとします．このとき

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1, \quad A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2 \quad \text{ならば} \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \tag{9.9}$$

が成立します．

Proof. A は対称ですから ${}^tA = A$ から $(A\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{v}_1, {}^tA\vec{v}_2) = (\vec{v}_1, A\vec{v}_2)$ が成立します．さらに

$$(A\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\alpha\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad (\vec{v}_1, A\vec{v}_2) = (\vec{v}_1, \beta\vec{v}_2) = \beta(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

から $(\alpha - \beta)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$ を得ます．$\alpha \neq \beta$ ですから (9.9) が従います． □

具体例について考えましょう．

例 9.1. 3 次の実対称行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9.10}$$

について考えます．まず

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda+1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) \\ 2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) \\ 2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2-1-8) = (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda+3)
\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = 3, 1, -3$ であることが分かります．

次にそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めますが，固有多項式の計算において用いた行基本変形はそのまま使えることに注意しましょう．

(i) $\underline{\lambda = 3 \text{ のとき}}$，行基本変形

$$3I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \times = \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{3r += 1r \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(3) \Leftrightarrow x = -2z,\ y = z$$

が従います．よって、$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

と表されます．

(ii) $\underline{\lambda = -1 \text{ のとき}}$，行基本変形

$$-I_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \times = -\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3r += (-1) \times 2r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{2r += (-2) \times 1r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r \times = \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{1r += 1 \times 2r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-1) \Leftrightarrow x = 0,\ y = -z$$

が従います．よって、$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

と表されます.

(iii) $\underline{\lambda = -3 \text{ のとき}}$，行基本変形

$$-3I_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{1r\times=(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3r+=1r\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-3) \Leftrightarrow x = z,\ y = z$$

が従います．よって、$\lambda = -3$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

と表されます.

　さらに

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と大きさ 1 の固有ベクトルを定めると、定理 *9.6* により

$$(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

が成立しますから $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は直交行列となります．さらに A は

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (3\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2\ \ -3\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$$

と直交行列 P により対角化されます.

例 9.2. 3 次の実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \tag{9.11}$$

について考えます．この A の固有多項式は $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8)$ と計算されます．固有値 $\lambda = 2,\ 8$ に対する固有ベクトルを求めましょう．

(i) $\underline{\lambda = 2 \text{ のとき}}$，$2I_2 - A$ を行基本変形すると $\vec{v} = {}^t(x\ y\ z)$ に対して

$$(2I_2 - A)\vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow x - y - 2z = 0$$

を得ます．このとき

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から，$V(2) := ker(2I_2 - A)$ の基底を $\vec{v}_1 = {}^t(1\ 1\ 0)$，$\vec{v}_2 = {}^t(2\ 0\ 1)$ ととれます．この基底を用いて，

$$||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0 \tag{9.12}$$

を満たす $V(2)$ の基底を次のように構成します．$\vec{v}_2$ の $\vec{v}_1$ 方向への正射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{||\vec{v}_1||^2}\vec{v}_1 = \vec{v}_1$$

で与えられます．このとき $(\vec{v}_2 - \vec{w}) \perp \vec{v}_1$ が成立することから

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{||\vec{v}_1||}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(1\ 1\ 0), \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{||\vec{v}_2 - \vec{w}||}(\vec{v}_2 - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{3}}{}^t(1\ \ -1\ 1)$$

とすれば，条件 (9.12) を満たします．

(ii) $\underline{\lambda = 8 \text{ のとき}}$，$8I_2 - A$ を行基本変形すると $\vec{v} = {}^t(x\ y\ z)$ に対して

$$(8I_2 - A)\vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow (x + \frac{1}{2}z = 0 \text{ かつ } y - \frac{1}{2}z = 0)$$

から $z = 2\alpha$ とおくと $V(8) := ker(8I_2 - A)$ のベクトルは

$$\vec{v} = \alpha{}^t(-1\ 1\ 2) \quad (\alpha \neq 0)$$

と表示されますから，大きさ 1 の $\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}{}^t(-1\ 1\ 2)$ を定めます．定理 *9.6* を用いると

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$$

が示され $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ が直交行列であることが分かります．この P を用いると

$$AP = (2\vec{p}_1\ 2\vec{p}_2\ 8\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad A = P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}{}^tP$$

と対角化できることが分かります．

演習 9.10. 次の実対称行列 A を直交行列で対角化しましょう．

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$　**(2)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　**(4)** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

9.3　2 次形式

9.3.1　2 次形式

3 次の対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$$

に対してその 2 次形式を

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

の関数として

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2rxz + 2qyz$$

と定めます．実対称行列が直交行列で対角化できることを示した定理 9.5 は 2 次形式について以下の形で応用されます. すなわち定理 9.5 にあるように直交行列 $P \in O(3)$ を用いて A を

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

と対角化できたとします．このとき座標変換

$$\vec{\xi} = {}^tP\vec{v} = {}^t(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$$

を用いると，A の 2 次形式は

$$(A\vec{v},\vec{v}) = ({}^tPAP{}^tP\vec{v}, {}^tP\vec{v}) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix}\vec{\xi}, \vec{\xi}\right) \tag{9.13}$$

$$= \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 + \alpha_3\xi_3^2 \tag{9.14}$$

と標準的な形に変換できます．

例 9.3. 例 *9.1* で考えた 3 次の対称行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9.15}$$

は

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が定める直交行列 $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ を用いて

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$$

と対角化されました．このとき座標変換

$$\vec{v} = {}^tP\vec{\xi}$$

によって A が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned}(A\vec{v},\vec{v}) &= ({}^tPA\vec{v}, {}^tP\vec{v}) = ({}^tPAP{}^tP\vec{v}, {}^tP\vec{v}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -3 \end{pmatrix}\vec{\xi}, \vec{\xi}\right) \\ &= 3\xi_1^2 - \xi_2^2 - 3\xi_3^2\end{aligned}$$

と標準的な形に表されます．

演習 9.11. 次の実対称行列が定める 2 次形式を直交行列による対角化を用いて標準形にしてください.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 　　**(2)** $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2 次形式が常に一定の符号を持つかどうかが応用上重要になります. そこで次の定義をします.

定義 9.1. **(2 次形式の正定値)** A を 3 次の実対称行列とします. A が定める 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$（あるいは A）が**正定値**（*positive definite*）であるとは

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

が成立するときで, **非負定値**（*non-negative definite*）であるとは

$$(A\vec{v}, \vec{v}) \geqq 0$$

が成立するときです.

この定義 9.1 において, 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$（あるいは A）が**負定値**（*negative definite*）であるとは

$$(A\vec{v}, \vec{v}) < 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

が成立するときで, **非正定値**（*non-positive definite*）であるとは

$$(A\vec{v}, \vec{v}) \leqq 0$$

が成立するときです.

正定値性を行列式を用いて特徴付けるために, 対称行列 A の特別な小行列を定義する必要があります. A の 1 次と 2 次, 3 次の（狭義の）**主座小行列** ((*successive*) *principal minors*) とは小行列

$$A_1 = (a), \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}, A_3 = A$$

のことです.

定理 9.7.（正定値性の特徴付け） A を 3 次の実対称行列とします．次の条件は同値です．

(1) A が定める 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$ が正定値（*resp.* 負定値）です．

(2) $\det(A_k) > 0$（*resp.* $(-1)^k \det(A_k) > 0$） $(k = 1, 2, 3)$.

(3) A の固有値 α_1，α_2，α_3 がすべて正（*resp.* 負）です．

Proof. A を直交行列で対角化して (9.13) を用いれば，(1) と (3) が同値であることが容易に証明できます．

(1) $\Longrightarrow$ (2) (1) 従って (3) が成立すれば

$$\det(A) > 0 \quad ((-1)^k \det(A) > 0)$$

であることが，等式 ${}^tPAP = \mathrm{diag}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_n)$ がある直交行列 P によって成立することから従います．さらに

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\right) = ax^2 > 0 \quad (x \neq 0)$$

から $a > 0$ が分かります．また

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\right) = \left(A_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) \neq \vec{0}$$

が分かります．これから定理 7.4 を用いると $\det(A_2) > 0$ も従います．以上で (1) $\Longrightarrow$ (2) を示しました．

(2) $\Longrightarrow$ (1) 3 次の実対称行列

$$A = \begin{pmatrix}a & p & r\\p & b & q\\r & q & c\end{pmatrix}$$

が条件 (2) すなわち $\det(A) > 0$, $\quad \det(A_2) = ab - p^2 > 0$, $\quad a > 0$ を満たすとします．ここで

$$\begin{aligned}(A\vec{v}, \vec{v}) &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qyz + 2rxz\\ &= a\left(x + \frac{p}{a}y + \frac{r}{a}x\right)^2 + \left(b - \frac{p^2}{a}\right)y^2 + 2\left(q - \frac{pr}{a}\right)yz + \left(c - \frac{r^2}{a}\right)z^2\end{aligned}$$

に注意します．ここでこの等式の最右辺の符号を見るために

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & p & r \\ 0 & b - \frac{p^2}{a} & q - \frac{pq}{a} \\ 0 & r - \frac{pq}{a} & c - \frac{q^2}{a} \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b - \frac{p^2}{a} & q - \frac{pq}{a} \\ r - \frac{pq}{a} & c - \frac{q^2}{a} \end{vmatrix}$$

を導きます．いま $\det(A) > 0$，$a > 0$ ですから

$$\begin{vmatrix} b - \frac{p^2}{a} & q - \frac{pq}{a} \\ r - \frac{pq}{a} & c - \frac{q^2}{a} \end{vmatrix} > 0$$

となります．これに加えて $\det(A_2) > 0$ から

$$b - \frac{p^2}{a} = \frac{ab - p^2}{a} > 0$$

も従います．以上の準備で $(y, z) \neq (0, 0)$ ならば

$$\left(b - \frac{p^2}{a}\right) y^2 + 2\left(q - \frac{pr}{a}\right) yz + \left(c - \frac{r^2}{a}\right) z^2 > 0$$

から $(A\vec{v}, \vec{v}) > 0$ であることが分かりました（ここでも 2 次の場合の定理 7.4 用いました）．他方 $y = z = 0$ ならば $\vec{v} \neq 0$ のとき $x \neq 0$ ですから

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = ax^2 > 0$$

となります． □

演習 9.12. 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ が正定値か負定値か判定しましょう．

演習 9.13. n 次の実対称行列が正定値ならば，A は正則行列で A^{-1} も実対称で正定値となります．このことを証明してください．

■非負定値性の特徴付け　本書では証明は与えませんが，実対称行列が非負定値であるための条件を小行列を用いて定式化できます．そのために 3 次の実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$$

に対して

$$A_{(1)} = (a), \quad A_{(2)} = (b), \quad A_{(3)} = (c)$$

$$A_{(1,2)} = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}, \quad A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} b & q \\ q & c \end{pmatrix}, \quad A_{(1,3)} = \begin{pmatrix} a & r \\ r & c \end{pmatrix}$$

$$A_{(1,2,3)} = A$$

を定めます．これらをそれぞれ，1 次，2 次，3 次の主座小行列と呼びます．

このとき次の定理 9.8 が成立します．

定理 9.8.（非負定値性の特徴付け） 3 次の実対称行列 A に対して，次の条件は同値です．

(1) A が定める 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$ が非負定値（*resp.* 非正定値）です．

(2) 主座小行列に対して以下が成立します．

$$A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)} \geq 0 \quad \left(\textit{resp.}\ \ A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)} \leq 0\right)$$

$$\det(A_{(1,2)}), \det(A_{(2,3)}), \det(A_{(1,3)}) \geq 0$$

$$\det(A_{(1,2,3)}) \geq 0 \quad \left(\textit{resp.}\ \ \det(A_{(1,2,3)}) \leq 0\right)$$

(3) A の固有値 α_1，α_2，α_n がすべて非負（*resp.* 非正）です．

■グラム行列の正値性　実 $m \times 3$ 行列 A に対して，そのグラム行列 ${}^tAA$ は 3 次の対称行列になりますが，その 2 次形式は非負定値となります．実際

$$({}^tAA\vec{x}, \vec{x}) = (A\vec{x}, A\vec{x}) = ||A\vec{x}||^2 \geqq 0$$

から分かります．さらに ${}^tAA$ が正定値であるための必要十分条件を求めましょう．

$$||A\vec{x}|| > 0 \Leftrightarrow A\vec{x} \neq \vec{0}$$

であることを用いると，${}^tAA$ が正定値である条件は

$$\vec{x} \neq \vec{0} \Longrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$$

であることが分かります．この条件は $\mathrm{rank}(A) = 3$，すなわち A の列ベクトル表示 $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ に対して $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2, \vec{a}_3$ が線型独立であることが条件となります．

演習 9.14. 実 $m \times n$ 行列 A に対して ${}^tAA\vec{x} = \vec{0} \Longleftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ であることを示してください．

第 6 章演習解答

演習 6.1 $\vec{v} = {}^t(v_1 \cdots v_i \cdots v_n) \neq \vec{0}$ であるならば，ある i について第 i 成分がゼロでない，すなわち $v_i \neq 0$ が成立する．このとき

$$x\vec{v} = {}^t(xv_1 \cdots xv_i \cdots xv_n) = \vec{0}$$

から $xv_i = 0$, さらに $vi \neq 0$ から $x = 0$ が従う．
別解　$\vec{v} \neq \vec{0}$ から $||\vec{v}|| > 0$ が成立する．このとき

$$||x\vec{v}|| = |x| \cdot ||\vec{v}|| = 0$$

から $|x| = 0$ 従って $x = 0$ を得る．**演習 6.2(1)** A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 4) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 2$ であることが分かる．次に固有ベクトルを求めよう．
(i) $\lambda = -5$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x + y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となる．
(ii) $\lambda = 2$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

　ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が成立する．一般論（定理＊＊）から P が正則であることが分かっているので，この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

演習 6.2(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 2 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda-1)+6 = \lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -2, -1$ であることが分かる．次に固有ベクトルを求めよう．

(i) $\lambda = -2$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x+y=0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

(ii) $\lambda = -1$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x+2y=0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が成立する．一般論（定理∗∗）から P が正則であることが分かっているので，この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

演習 6.2(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 12 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1) - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda - 7)(\lambda + 5)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 7$ であることが分かる．次に固有ベクトルを求めよう．

(i) $\lambda = -5$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

(ii) $\lambda = 7$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (-5\vec{p}_1\ 7\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

が成立する．一般論（定理＊＊）から P が正則であることが分かっているので，この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

演習 6.3(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$$

となるので，A の固有値は $\lambda = -5, 2$ である．そして Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 + 3A - 10I_2 = O_2$$

が成立する．この式を

$$A(A + 5I_2) = 2(A + 5I_2), \quad A(A - 2I_2) = -5(A - 2I_2)$$

と 2 通りに変形すると

$$A^n(A + 5I_2) = 2^n(A + 5I_2) \tag{9.16}$$

$$A(A - 2I_2) = (-5)^n(A - 2I_2) \tag{9.17}$$

が従う．ここで (9.16)−(9.17) を考えると

$$7A^n = 2^n(A + 5I_2) - (-5)^n(A - 2I_2)$$

から

$$A^n = \frac{2^n}{7}(A + 5I_2) - \frac{(-5)^n}{7}(A - 2I_2)$$

を得る．

演習 6.3(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$$

となるので，A の固有値は $\lambda = -2, -1$ である．そして Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 + 3A + 2I_2 = O_2$$

が成立する．この式を

$$A(A + 2I_2) = -(A + 2I_2), \quad A(A + I_2) = -2(A + I_2)$$

と 2 通りに変形すると

$$A^n(A + 2I_2) = (-1)^n(A + 2I_2) \tag{9.18}$$

$$A^n(A + I_2) = (-2)^n(A + I_2) \tag{9.19}$$

が従う．ここで (9.18)−(9.19) を考えると

$$A^n = (-1)^n(A + 2I_2) - (-2)^n(A + I_2)$$

を得る．

演習 6.3(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda - 7)(\lambda + 5)$$

となるので，A の固有値は $\lambda = -5, 7$ である．そして Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A - 35I_2 = O_2$$

が成立する．この式を

$$A(A + 5I_2) = 7(A + 5I_2), \quad A(A - 7I_2) = -5(A - 7I_2)$$

と 2 通りに変形すると

$$A^n(A+5I_2)=7^n(A+5I_2) \tag{9.20}$$

$$A^n(A-7I_2)=(-5)^n(A-7I_2) \tag{9.21}$$

が従う．ここで (9.20)−(9.21) を考えると

$$12A^n=7^n(A+5I_2)-(-5)^n(A-7I_2)$$

から

$$A^n=\frac{7^n}{12}(A+5I_2)-\frac{(-5)^n}{12}(A-7I_2)$$

を得る．

演習 6.4(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-7 & -4\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda-3)+4=\lambda^2-10\lambda+25=(\lambda-5)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda=-5$ (重根) であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2-10A+25I_2=(A-5I_2)^2=O_2$$

が従う．これを

$$A(A-5I_2)=5(A-5I_2)$$

と変形して，両辺に次々と A を掛けていくと

$$A^n(A-5I_2)=5^n(A-5I_2)$$

を得る．さらにこの両辺を 5^{n+1} で割ると

$$\frac{1}{5^{n+1}}A^{n+1}-\frac{1}{5^n}A^n=\frac{1}{5}(A-5I_2)$$

となるが，これを等差の式と考えると

$$\frac{1}{5^n}A^n=I_2+\frac{n}{5}(A-5I_2)$$

から

$$A^n=5^nI_2+n5^{n-1}(A-5I_2)$$

が従う．

演習 6.4(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 \\ -9 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1) + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 2$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2$$

が従う．これを

$$A(A - 2I_2) = 2(A - 2I_2)$$

と変形して，両辺に次々と A を掛けていくと

$$A^n(A - 2I_2) = 2^n(A - 2I_2)$$

を得る．さらにこの両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{1}{2^{n+1}}A^{n+1} - \frac{1}{2^n}A^n = \frac{1}{2}(A - 2I_2)$$

となるが，これを等差の式と考えると

$$\frac{1}{2^n}A^n = I_2 + \frac{n}{2}(A - 2I_2)$$

から

$$A^n = 2^n I_2 + n2^{n-1}(A - 2I_2)$$

が従う．

演習 6.4(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 1$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A + I_2 = (A - I_2)^2 = O_2$$

が従う．これを

$$A(A - I_2) = A - I_2$$

と変形して，両辺に次々と A を掛けていくと

$$A^n(A - I_2) = (A - I_2)$$

を得る。これを

$$A^{n+1} - A^n = A - I$$

と変形して，等差の式と考えると

$$A^n = I + n(A - I)$$

が従う．

演習 6.5(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 10A + 25I_2 = (A - 5I_2)^2 = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 5)^2$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 5)^2 + a\lambda + b$$

と割り算したとして，余りに出てきた a および b を求める．そのために，この式の両辺を λ で微分した

$$n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda - 5)^2 + 2q(\lambda)(\lambda - 5) + a$$

も用いる．この 2 つの式の両辺に $\lambda = 5$ を代入して

$$5a + b = 5^n, \quad a = n5^{n-1}$$

から

$$a = n5^{n-1}, \quad b = 5^n - n5^n = 5^n(1 - n)$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 5)^2 + n5^{n-1}\lambda + 5^n(1 - n)$$

が従う．これから

$$A^n = q(A)(A - 5I_2)^2 + n5^{n-1}A + 5^n(1 - n)I_2 = n5^{n-1}A + 5^n(1 - n)I_2$$

となることが分かる．

演習 6.5(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 2$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 2)^2 + a\lambda + b$$

と割り算したとして，余りに出てきた a および b を求める．そのために，この式の両辺を λ で微分した

$$n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda - 2)^2 + 2q(\lambda)(\lambda - 2) + a$$

も用いる．この 2 つの式の両辺に $\lambda = 2$ を代入して

$$2a + b = 2^n, \quad a = n2^{n-1}$$

から

$$a = n2^{n-1}, \quad b = 2^n - n2^n = 2^n(1 - n)$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 2)^2 + n2^{n-1}\lambda + 2^n(1 - n)$$

が従う．これから

$$A^n = q(A)(A - 2I_2)^2 + n2^{n-1}A + 2^n(1 - n)I_2 = n2^{n-1}A + 2^n(1 - n)I_2$$

となることが分かる．

演習 6.5(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 1$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 1)^2 + a\lambda + b$$

と割り算して，余りに出てきた a および b を求める．そのために，この式の両辺を λ で微分した

$$n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda - 1)^2 + 2q(\lambda)(\lambda - 1) + a$$

も用いる．この 2 つの式の両辺に $\lambda = 1$ を代入して

$$a + b = 1, \quad a = n$$

から

$$a = n,\ b = 1 - n$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 1)^2 + n\lambda + (1 - n)$$

が従う．これから

$$A^n = q(A)(A - I_2)^2 + nA + (1 - n)I_2 = nA + (1 - n)A$$

となることが分かる．

演習 6.5(4) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 3) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 2$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 2)^2 + a\lambda + b$$

と割り算して，余りに出てきた a および b を求める．そのために，この式の両辺を λ で微分した

$$n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda - 2)^2 + 2q(\lambda)(\lambda - 2) + a$$

も用いる．この 2 つの式の両辺に $\lambda = 2$ を代入して

$$2a + b = 2^n, \quad a = n2^{n-1}$$

から

$$a = n2^{n-1}, \quad b = 2^n - n2^n = 2^n(1-n)$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 2)^2 + n2^{n-1}\lambda + 2^n(1-n)$$

が従う．これから

$$A^n = q(A)(A - 2I_2)^2 + n2^{n-1}A + 2^n(1-n)I_2 = n2^{n-1}A + 2^n(1-n)I_2$$

となることが分かる．

演習 6.8 λ^n を

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

で割り算して

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) + a\lambda + b$$

を得たとする．この式に $\lambda = \alpha$, $\lambda = \beta$ を代入して

$$\alpha^n = a\alpha + b \tag{9.22}$$

$$\beta^n = a\beta + b \tag{9.23}$$

を得る．(9.22)–(9.23) から

$$a(\alpha - \beta) = \alpha^n - \beta^n$$

さらに

$$a = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

が従う．これから

$$\begin{aligned} b &= \alpha^n - a\alpha \\ &= \alpha^n - \alpha\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha\beta^n - \beta\alpha^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

も得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta) + \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\lambda + \frac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\alpha-\beta}$$

となるが，Cayley-Hamilton の定理から

$$(A-\alpha I_2)(A-\beta I_2) = O_2$$

が成立することが分かるので

$$\begin{aligned} A^n &= q(A)O_2 + + \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A + \frac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\alpha-\beta}I_2 \\ &= \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A + \frac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\alpha-\beta}I_2 \end{aligned}$$

演習 6.7(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)-6 = \lambda^2+3\lambda-10 = (\lambda+5)(\lambda-2)$$

となるので A の固有値は $\lambda=-5,2$ であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2+3A-10I_2 = (A+5I_2)(A-2I_2) = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda)=(\lambda+5)(\lambda-2)$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda+5)(\lambda-2) + a\lambda + b \tag{9.24}$$

と割り算して，余りに出てきた a および b を求める．すなわち (9.24) に $\lambda=-5$ と $\lambda=2$ を代入して

$$(-5)^n = -5a+b \tag{9.25}$$

$$2^n = 2a+b \tag{9.26}$$

を得て，さらに (9.25)−(9.26) から

$$-7a = (-5)^n - 2^n \quad 従って \quad a = \frac{2^n-(-5)^n}{7}$$

そして

$$b = 2^n - \frac{2(2^n-(-5)^n)}{7} = \frac{5\cdot 2^n + 2\cdot(-5)^n}{7}$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda+5)(\lambda-2) + \frac{2^n-(-5)^n}{7}\lambda + \frac{5\cdot 2^n + 2\cdot(-5)^n}{7}$$

さらに

$$\begin{aligned} A^n &= q(A)(A+5I_2)(A-2I_2) + \frac{2^n-(-5)^n}{7}A + \frac{5\cdot 2^n + 2\cdot(-5)^n}{7}I_2 \\ &= \frac{2^n-(-5)^n}{7}A + \frac{5\cdot 2^n + 2\cdot(-5)^n}{7}I_2 \end{aligned}$$

を得る。

演習 6.7(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 2 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda-1)+6 = \lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -1, -2$ であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2+3A+2I_2 = (A+I_2)(A+2I_2) = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda+1)(\lambda+2) + a\lambda + b \tag{9.27}$$

と割り算して，余りに出てきた a および b を求める．すなわち (9.27) に $\lambda = -1$ と $\lambda = -2$ を代入して

$$(-1)^n = -a+b \tag{9.28}$$

$$(-2)^n = -2a+b \tag{9.29}$$

を得て，さらに (9.28)−(9.29) から

$$a = (-1)^n - (-2)^n$$

そして

$$b = (-1)^n + (-1)^n - (-2)^n = 2(-1)^n - (-2)^n$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda+1)(\lambda+2) + ((-1)^n - (-2)^n)\lambda + 2(-1)^n - (-2)^n$$

さらに

$$\begin{aligned} A^n &= q(A)(A+I_2)(A+2I_2) + ((-1)^n - (-2)^n)A + 2(-1)^n - (-2)^n I_2 \\ &= ((-1)^n - (-2)^n)A + 2(-1)^n - (-2)^n I_2 \end{aligned}$$

を得る。

演習 6.7(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -12 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda+5)(\lambda-7)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 7$ であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A - 35I_2 = (A+5I_2)(A-7I_2) = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda+5)(\lambda-7)$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda+5)(\lambda-7) + a\lambda + b \tag{9.30}$$

と割り算して，余りに出てきた a および b を求める．すなわち (9.30) に $\lambda = 7$ と $\lambda = -5$ を代入して

$$7^n = 7a + b \tag{9.31}$$

$$(-5)^n = -5a + b \tag{9.32}$$

を得て，さらに (9.31)−(9.32) から

$$12a = 7^n - (-5)^n \quad \text{従って} \quad a = \frac{7^n - (-5)^n}{12}$$

そして

$$b = 7^n - \frac{7^n - (-5)^n}{12} = \frac{5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n}{12}$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda+5)(\lambda-7) + \frac{7^n - (-5)^n}{12}\lambda + \frac{5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n}{12}$$

さらに

$$\begin{aligned} A^n &= q(A)(A+5I_2)(A-7I_2) + \frac{7^n - (-5)^n}{12}A + \frac{5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n}{12}I_2 \\ &= \frac{7^n - (-5)^n}{12}A + \frac{5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n}{12}I_2 \end{aligned}$$

を得る。

演習 6.8(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 5$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 10A + 25I_2 = (A - 5I_2)^2 = O_2 \tag{9.33}$$

が従う．ここで

$$A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

から

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と選ぶと

$$\vec{p}_2 := (A - 5I_2)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

となる．このとき

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定めると一般論から P は正則であることが分かる。また Cayley-Hamilton の定理から従う (9.33) すなわち

$$(A - 5I_2)^2 = O_2$$

から

$$(A - 5I_2)\vec{p}_2 = (A - 5I_2)^2\vec{p}_1 = O_2\vec{p}_1 = \vec{0}$$

を得る．以上から

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (5\vec{p}_1 + \vec{p}_2\ 5\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

を得る．

演習 6.8(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 1$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2 \tag{9.34}$$

が従う．ここで

$$A - I_2 2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

から

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と選ぶと

$$\vec{p}_2 := (A - 2I_2)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

となる．このとき

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

と定めると一般論から P は正則であることが分かる。また Cayley-Hamilton の定理から従う (9.34) すなわち

$$(A - 2I_2)^2 = O_2$$

から

$$(A - 2I_2)\vec{p}_2 = (A - 2I_2)^2\vec{p}_1 = O_2\vec{p}_1 = \vec{0}$$

を得る．以上から

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (2\vec{p}_1 + \vec{p}_2\ 2\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を得る．

演習 6.8(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 1$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A + I_2 = (A - I_2)^2 = O_2 \tag{9.35}$$

が従う．ここで

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

から

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と選ぶと

$$\vec{p}_2 := (A - I_2)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

となる．このとき

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

と定めると一般論から P は正則であることが分かる。また Cayley-Hamilton の定理からしたがう (9.35)

$$(A - I_2)^2 = O_2$$

から

$$(A - I_2)\vec{p}_2 = (A - I_2)^2\vec{p}_1 = O_2\vec{p}_1 = \vec{0}$$

を得る．以上から

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2\ \vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る．

第 7 章演習解答

演習 7.1 (1) $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

演習 7.2 (7.8) について
$(\Rightarrow)$ は明らかです．$(\Leftarrow)$ は，$y = \vec{a}$ とすると

$$(\vec{a}, \vec{a}) = ||\vec{a}||^2 = 0$$

から $\vec{a} = \vec{0}$ が従うことから分かります．
(7.9) について$(\Rightarrow)$ は明らかです．$(\Leftarrow)$ は，$C = \vec{c}_1\ \vec{c}_2$ と列ベクトル表示をすると

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c}_1 = \vec{0}$$

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c}_1 = \vec{0}$$

から $C = (\vec{0}\ \vec{0}) = O_2$ となることから分かります．

演習 7.3 P_1P_2 について

$$^t(P_1P_2)P_1P_2 = {}^tP_2{}^tP_1P_1P_2 = {}^tP_2I_2P_2 = {}^tP_2P_2 = I_2$$

$$P_1P_2{}^t(P_1P_2) = P_1P_2{}^tP_2{}^tP_1 = P_1I_2{}^tP_1 = P_1{}^tP_1 = I_2$$

から P_1P_2 は直交行列になります．
${}^tP_1 = P_1^{-1}$ について

$$^t({}^tP_1){}^tP_1 = P_1{}^tP_1 = I_2$$

$${}^tP_1{}^t({}^tP_1) = {}^tP_1P_1 = I_2$$

から ${}^tP_1$ が直交であることが分かります．

演習 7.4

$$
\begin{aligned}
Q^2 &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2
\end{aligned}
$$

が成立しますから，正則行列の定義から Q は正則となり，$Q^{-1} = Q$ が従います.

演習 7.5 $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$
\begin{aligned}
\vec{w} &= \left(x\cos\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\
&= x \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
\vec{q} &= \left(2 \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} - I_2 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 & 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & \sin^2\frac{\alpha}{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \vec{v}
\end{aligned}
$$

となります．よって

$$
Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}
$$

であることが分かります.

演習 7.6 (1) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ を直交行列で対角化しましょう。

(2) 制約条件

$$x^2+y^2=1$$

の下で

$$z=\left(A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)=2x^2+2xy+2y^2$$

の最大値・最小値を求めましょう.

解答 (1) まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda)=|\lambda I_2-A|&=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}\\ &=(\lambda-2)^2-(-1)^2=(\lambda-1)(\lambda-3)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda=-1,3$ であることが分かります。次に $\lambda=-1,3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda=3$ のとき、

$$A\vec{v}=3\vec{v}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow x-y=0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\quad(x\neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda=1$ のとき、

$$A\vec{v}=-\vec{v}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow x+y=0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\quad(x\neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (3\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から $A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ と A は対角化できます。

(2) A が定める 2 次形式を (1) で用いた回転座標変換を適用します。P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(P^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(P^{-1}AP \cdot P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\ &= 3\xi^2 + \eta^2\end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

さらに制約条件は

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

となりますから，制約条件を用いて η を消去すると

$$z = 3\xi^2 + \eta^2 = 3\xi^2 + (1 - \xi^2) = 1 + 2\xi^2 \geq 1$$

となりますから，制約条件の下で $z \geq 1$ であることが分かります。さらに最後の等号が $\xi = 0$ 従って $\eta = \pm 1$ のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm\vec{p}_2$$

において z は最小値 1 を取ることが分かります.

他方，制約条件を用いて ξ を消去すると

$$z = 3\xi^2 + \eta^2 = 3(1 - \eta^2) + \eta^2 = 3 - 2\eta^2 \leq 3$$

となりますから，制約条件の下で $z \leq 3$ であることが分かります。さらに最後の等号が $\eta = 0$ 従って $\xi = \pm 1$ のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_1$$

において z は最小値 3 を取ることが分かります.

演習 7.6B (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化しましょう。

(2) 制約条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

の下で

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x^2 + 4xy + y^2$$

の最大値・最小値を求めましょう.

解答 (1) まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2 - (-2)^2 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 3$ であることが分かります。次に $\lambda = -1, 3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 3$ のとき、

$$A\vec{v} = 3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = -1$ のとき、

$$A\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (3\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ と A は対角化できます。

(2) A が定める 2 次形式を (1) で用いた回転座標変換を適用します。P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(P^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(P^{-1} AP \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= 3\xi^2 - \eta^2 \end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

さらに制約条件は

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

となりますから，制約条件を用いて η を消去すると

$$z = 3\xi^2 - \eta^2 = 3\xi^2 - (1 - \xi^2) = -1 + 4\xi^2 \geq -1$$

となりますから，制約条件の下で $z \geq -1$ であることが分かります。さらに最後の等号が $\xi = 0$ 従って $\eta = \pm 1$ のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_2$$

において z は最小値 -1 を取ることが分かります.

他方，制約条件を用いて ξ を消去すると

$$z = 3\xi^2 - \eta^2 = 3(1-\eta^2) - \eta^2 = 3 - 4\eta^2 \leq 3$$

となりますから，制約条件の下で $z \leq 3$ であることが分かります。さらに最後の等号が $\eta = 0$ 従って $\xi = \pm 1$ のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_1$$

において z は最小値 3 を取ることが分かります.

演習 7.7 以下の対称行列 A を回転行列で対角化して、A が定める 2 次形式を回転座標変換で簡単にしましょう.

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

解答 (1) まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -3 & \lambda - 7 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda-7) - (-3)^2 = (\lambda+2)(\lambda-8) \end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -2, 8$ であることが分かります。次に $\lambda = -2, 8$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = -2$ のとき、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 3y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 8$ のとき、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1\ 8\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$ と A は対角化できます。さらに P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned}
\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(P^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(P^{-1} AP \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\
&= -2\xi^2 + 8\eta^2
\end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

(2) まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -4 & \lambda - 7 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 1)(\lambda - 7) - (-4)^2 = (\lambda - 9)(\lambda + 1)
\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 9$ であることが分かります。次に $\lambda = -1, 3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 9$ のとき、

$$A\vec{v} = 9\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。
(ii) $\lambda = -1$ のとき、

$$A\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。
　ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (9\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ と A は回転行列 P を用いて対角化できます。ここで A が定める 2 次形式

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

を考えましょう。P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます。このことを用いると

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{v}) &= (P^{-1}A\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= (P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v} \right) \end{aligned}$$

が従います。さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \vec{v} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = 9\xi^2 - \eta^2$$

となります。

演習 7.8 対称行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ が定める 2 次形式が正定値であるとします．このとき A は正則で，A^{-1} が対称となり，A^{-1} が定める 2 次形式も正定値となることを示しましょう．

A が定める 2 次形式が正定値ですから，

$$|A| > 0$$

が成立します．よって A は正則であることが分かります．

$$AA^{-1} = I_2$$

の両辺の転置をとると

$${}^t\left(A^{-1}\right){}^tA = {}^t\left(A^{-1}\right)A = I_2$$

が成立します．この両変に右から A^{-1} を掛けると

$${}^t\left(A^{-1}\right) = A^{-1}$$

が従いますから，A^{-1} が対称であることが分かります．A の固有値 α, β は

$$\alpha, \beta > 0$$

となります．このとき回転行列 R が存在して

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成立します．この両辺の逆行列をとると

$$R^{-1}A^{-1}R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

を得ます．

$$\Phi_{A^{-1}}(\lambda) = \Phi_{R^{-1}A^{-1}R} = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{\beta} \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{1}{\alpha})(\lambda - \frac{1}{\beta})$$

から A^{-1} の固有値が $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} > 0$ と正となります．よって対称な A^{-1} が定める 2 次形式は正定値となります．

演習 7.9 次の 2 次曲線を座標の平行移動と回転座標変換を用いて簡単にしましょう.

(1) $2x^2-\sqrt{3}xy+y^2+(2\sqrt{3}-4)x+(\sqrt{3}-4)y+(4-\sqrt{3})=0$

(2) $x^2-4xy+4y^2-8x+6y=0$

(3) $2x^2+4xy-y^2-20x-8y+32=0$

(4) $x^2+xy+y^2+x+y=0$

(5) $x^2-4xy+y^2+2x+4y-5=0$

(6) $x^2-4xy+4y^2-5y-2=0$

解答 (1)

$$2x^2-\sqrt{3}xy+y^2+(2\sqrt{3}-4)x+(\sqrt{3}-4)y+(4-\sqrt{3})=0 \tag{1}$$

は

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4 \\ \sqrt{3}-4 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)+4-\sqrt{3}=0 \tag{2}$$

と表されます. 平行移動の座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって (2) は

$$(A\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right))+\left(2A\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)+\vec{b}, \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)\right)+(A\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right))+\left(\vec{b}, \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)\right)+4-\sqrt{3}=0$$

となりますから, ここで

$$2A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=-\vec{b} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4 \\ \sqrt{3}-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)&=\frac{1}{2}\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4 \\ \sqrt{3}-4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\\ &=2\sqrt{3}-6\end{aligned}$$

と計算されますから (2) は

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) - 2 + \sqrt{3} = 0 \tag{3}$$

となります.

次に A を回転行列で対角化します. A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda - 2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \lambda - 1\end{vmatrix} = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{5}{2})$$

から A の固有値は $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ であることが分かります. さらに固有ベクトルを求めます.

$\lambda = \frac{1}{2}$ のとき

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\cdot x - y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ \sqrt{3}\cdot x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

$\lambda = \frac{5}{2}$ のとき

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x + \sqrt{3}\cdot y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{3}\cdot y\\ y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$R = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2) = \left(\frac{1}{2}\vec{r}_1\ \frac{5}{2}\vec{r}_2\right) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

から

$$ {}^tRAR = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} $$

と A は回転行列 R によって対角化されます．さらに

$$ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} $$

と回転座標変換を定めると

$$ \begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) &= \left(AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left({}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\eta^2 \end{aligned} $$

となりますから，この座標で (1) は

$$ \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\eta^2 = 2 - \sqrt{3} $$

と表され，楕円であることが分かります．

(2)

$$ x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 6y = 0 \tag{1} $$

は

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} $$

とすると

$$ \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 0 \tag{2} $$

と表されます．$|A| = 0$ ですから，A を回転行列で対角化することから始めます．

　A の固有多項式は

$$ \Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5) $$

から A の固有値は $\lambda = 0, 5$ であることが分かります．さらに固有ベクトルを求めます．

<u>$\lambda = 0$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

<u>$\lambda = 5$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

　ここで回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (0 \cdot \vec{r}_1 \ 5 \cdot \vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

と A は回転行列 R によって対角化されます. さらに

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned}
\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(AR\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\
&= \left({}^tRAR\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\
&= 5\eta^2
\end{aligned}$$

$$\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\vec{b}, R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \left({}^t R\vec{b}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \frac{-10\xi + 20\eta}{\sqrt{5}}$$

となりますから，この座標で (1) は

$$5\eta^2 + \frac{-10\xi + 20\eta}{\sqrt{5}} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \eta^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}\eta - \frac{2}{\sqrt{5}}\xi = 0 \tag{3}$$

となります．さらにこれを

$$\xi = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\eta + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

と変形します．最後に

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \eta + \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換によって (1) は

$$X = \frac{\sqrt{5}}{2}Y^2$$

と表されます．

別解 (1) は

$$(x - 2y)^2 - 8x + 6y = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{x - 2y}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y = 0$$

と変形できます．回転座標変換を

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x+y}{\sqrt{5}} \\ \frac{-x+2y}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と定めると (1) は

$$\eta^2 - \frac{8}{5}\cdot\frac{2\xi - \eta}{\sqrt{5}} + \frac{6}{5}\cdot\frac{\xi + 2\eta}{\sqrt{5}} = \eta^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\xi + \frac{4}{\sqrt{5}}\eta = 0$$

と表されます．

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}$ とすれば

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + 32 = 0 \tag{1}$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned}
&\left(A \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + 32 \\
&= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32 \\
&= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \\
&\quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32
\end{aligned}$$

と展開できます. ここで

$$\left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A\vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned}
z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32 \\
&= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32
\end{aligned}$$

となります. ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} A^{-1} \vec{b} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6} \right) \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$
\begin{aligned}
(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 &= \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + 32 = -6
\end{aligned}
$$

から

$$
\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) - 6 = 0
$$

となります.

次に A を回転行列で対角化します. A の固有多項式は

$$
\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 2)
$$

から A の固有値は $\lambda = -2, 3$ であることが分かります. さらに固有ベクトルを求めます.

<u>$\lambda = -2$ のとき</u>

$$
A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y = 0
$$

から

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)
$$

か固有ベクトルとなります.

<u>$\lambda = 3$ のとき</u>

$$
A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y = 0
$$

から

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)
$$

か固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$
R = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}
$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2) = (-2\vec{r}_1\ 3\vec{r}_2) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と A は回転行列 R によって対角化されます．さらに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) &= \left(AR\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\ &= \left({}^tRAR\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\ &= -2\xi^2 + 3\eta^2\end{aligned}$$

となりますから，この座標で (1) は

$$-2\xi^2 + 3\eta^2 - 6 = 0$$

と表され，双曲線であることが分かります．

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすれば

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0 \tag{1}$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned}
&\left(A\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right),\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)+\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)\\
&\qquad+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

と展開できます．ここで

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},{}^tA\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},A\vec{\alpha}\right)=\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned}
&\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+2\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(2A\vec{\alpha}+\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})=0
\end{aligned}$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha}+\vec{b}=\vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}
(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})&=-\frac{1}{2}(\vec{b},\vec{\alpha})\\
&=-\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

から (1) は

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)-\frac{1}{3}=0$$

となります．

さらに A，正確には 2 次形式 $\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)$ を回転行列

$$R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

を用いた座標変換

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

で変換します．すなわち

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)&=\left(AR\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\\&=\left({}^tRAR\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\\&=\left(\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)=\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\eta^2\end{aligned}$$

となります．ここで

$${}^tRAR=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

であることを用いました．以上から与えられた 2 次曲線は楕円

$$\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\eta^2-\frac{1}{3}=0$$

であることが分かりました．

(5) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ とすれば

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)-5=0 \tag{1}$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\vec{\alpha},\quad \text{ただし } \vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると (1) は

$$
\begin{aligned}
&\left(A\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right),\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)-5\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)-5\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)+\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)\\
&\quad+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)-5=0
\end{aligned}
$$

と展開できます．ここで

$$
\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},{}^{t}A\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},A\vec{\alpha}\right)=\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)
$$

と変形すると

$$
\begin{aligned}
&\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+2\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(2A\vec{\alpha}+\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})
\end{aligned}
$$

となります．ここで

$$
2A\vec{\alpha}+\vec{b}=\vec{0}
$$

すなわち

$$
\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}
$$

と定めると

$$
\begin{aligned}
(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})&=\frac{1}{2}(\vec{b},\vec{\alpha})\\
&=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\right)=\frac{13}{3}
\end{aligned}
$$

から (1) は

$$
\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\frac{13}{3}-5=0\quad\text{すなわち}\quad\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)-\frac{2}{3}=0
$$

となります．

次に A を回転行列で対角化します．．A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 3$ であることが分かります．さらに固有ベクトルを求めます.

<u>$\lambda = -1$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

<u>$\lambda = 3$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2) = (-\vec{r}_1\ 3\vec{r}_2) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と A は回転行列 R によって対角化されます．さらに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)&=\left(AR\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\\&=\left({}^tRAR\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\\&=-\xi^2+3\eta^2\end{aligned}$$

となりますから，この座標で (1) は

$$-\xi^2+3\eta^2-\frac{2}{3}=0$$

と表され，双曲線であることが分かります.

(6)

$$x^2-4xy+4y^2-5y-2=0 \tag{1}$$

について問題 (2) の別解と同様に考えてみます．すなわち

$$\left(\frac{x-2y}{\sqrt{5}}\right)^2-y-\frac{2}{5}=0 \tag{2}$$

と変形すると，回転座標変換

$$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

によって

$$\xi^2-\frac{-2\xi+\eta}{\sqrt{5}}-\frac{2}{5}=0$$

となります．これを

$$\left(\xi+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{\eta}{\sqrt{5}}-\frac{3}{5}=0 \quad \text{すなわち} \quad \eta=\sqrt{5}\left(\xi+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{3}{\sqrt{5}}$$

とさらに変形します．ここで

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi+\frac{1}{\sqrt{5}}\\\eta+\frac{3}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換を考えると

$$Y=\sqrt{5}X^2$$

となります.

追加問題 (2021 年版)

I (MSF2018 第 4 章 II) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してその転置行列を ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ によって定義します. $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta}), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned}(A\vec{v}, \vec{w}) &= (x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}, \vec{w}) = x(\vec{\alpha}, \vec{w}) + y(\vec{\beta}, \vec{w}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

となる．他方

$${}^tA\vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha} \\ {}^t\vec{\beta} \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha}\vec{w} \\ {}^t\vec{\beta}\vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix}$$

から

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tA\vec{w} \right) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が従います.

II (MSF2018 第 4 章 III) **(1)** 座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

によって

$$z = x^2 + xy + y^2 - x - 2y$$

を ξ, η で表しましょう.

(2) (1) を用いて z の最小値を求めましょう.

解答

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \end{cases}$$

から

$$x + y = \sqrt{2}\xi, \quad xy = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$$

となります．従って

$$\begin{aligned} z &= (x+y)^2 - xy - x - 2y \\ &= 2\xi^2 - \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \\ &= \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\eta \\ &= \frac{3}{2}\left(\xi - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{3}{16} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{2}\left(\xi - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{7}{16} \end{aligned}$$

から $\xi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$，$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，すなわち $x = -\frac{1}{4}$，$y = \frac{3}{4}$ のとき z は最小値 $-\frac{7}{16}$ をとります．

III (MSF2018 第 4 章 IV)

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y$$

に対して，平行移動の座標変換を用いて 1 次の項のない形にしましょう．

解答 $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$
\begin{aligned}
z &= \left(A\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right),\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)\\
&= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)\\
&= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)+\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

と展開できます．ここで

$$
\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},{}^tA\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},A\vec{\alpha}\right)=\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)
$$

と変形すると

$$
\begin{aligned}
z &= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+2\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)\\
&= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(2A\vec{\alpha}+\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})
\end{aligned}
$$

となります．ここで

$$
2A\vec{\alpha}+\vec{b}=\vec{0}
$$

すなわち

$$
\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}
$$

と定めると

$$
\begin{aligned}
(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha}) &= \frac{1}{2}(\vec{b},\vec{\alpha})\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix},\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)=-\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

から

$$
z=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)-\frac{2}{3}
$$

となります．

IV (MSF2018 第 4 章 VI)

$$z = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32$$

に対して，平行移動の座標変換を用いて 1 次の項のない形にしましょう．

解答 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + 32$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + 32 \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) + 32 \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) \\ &\qquad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) + 32 \end{aligned}$$

と展開できます．ここで

$$\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^tA\vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha}\right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + 2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) + 32 \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \end{aligned}$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 &= \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + 32 = -6\end{aligned}$$

から

$$z = \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) - 6$$

となります.

V (MSF2018 第 4 章 VII) $a > 0,\ ab - c^2 > 0$ のとき

$$ax^2 + 2cxy + by^2 > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2$$

となります. ここで $a > 0,\ ab - c^2 > 0$ から

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0$$

であることが分かります. さらにこの不等式における等号成立の必要十分条件は

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = 0, \quad \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0$$

すなわち

$$x + \frac{c}{a}y = y = 0 \quad i.e. \quad x = y = 0$$

ですから，$x \neq 0$ または $y \neq 0$ が成立するとき

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 > 0$$

となります.

VI $A = \begin{pmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{pmatrix}$ に対して

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$$

を満たす $c \in \mathbf{R}$ をすべて求めましょう.

解答　求める条件は

$$5 - c > 0 \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{vmatrix} > 0$$

となります.

$$\begin{vmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{vmatrix} = (5-c)(2-c) - 2^2 = (c-1)(c-6) > 0 \quad \Leftrightarrow c < 1, c > 6$$

なので，求める条件は

$$c < 1$$

であることが分かります.

VII 関数

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x + 6y$$

に対して回転座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

を用いて、最小値を求めましょう.

解答

$$z = (x+y)^2 - xy - 4x + 6y$$

に

$$x+y = \sqrt{2}X, \quad xy = \frac{1}{2}\left(X^2 - Y^2\right)$$

を代入して

$$\begin{aligned} z &= 2X^2 - \frac{1}{2}\left(X^2 - Y^2\right) - 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) + 6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ &= \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + \sqrt{2}X + 5\sqrt{2}Y \\ &= \frac{3}{2}\left(X + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}(Y + 5\sqrt{2})^2 - \frac{1}{3} - 25 \end{aligned}$$

から $X = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $Y = -5\sqrt{2}3$ のとき，すなわち

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + 5\sqrt{2}\right) = \frac{14}{3} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} - 5\sqrt{2}\right) = -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

のとき最小値 $z = -25$ をとります.

VIII 曲線 $x^2 + 3xy + y^2 - 1 = 0$ が回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ によっていかなる式で表されるか考えましょう.

解答

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y &=& \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{array}\right.$$

から

$$x+y = \sqrt{2}X, \quad xy = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$$

となります．これから

$$x^2 + 3xy + y^2 - 1 = 2X^2 + \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) - 1 \qquad = \frac{5}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 - 1$$

となります.

問題 IX(1) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化して、B が定める 2 次形式 $\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ を簡単にしましょう。

解答 まず B の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_B(\lambda) = |\lambda I_2 - B| &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -3 & \lambda-7 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda-7) - (-3)^2 = (\lambda+2)(\lambda-8) \end{aligned}$$

から B の固有値は $\lambda = -2, 8$ であることが分かります。次に $\lambda = -2, 8$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = -2$ のとき、

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 3y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 8$ のとき、

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$BP = (B\vec{p}_1\ B\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1\ 8\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

から $B = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は対角化できます。さらに P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned}\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(P^{-1}B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(P^{-1}BP \cdot P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\ &= -2\xi^2 + 8\eta^2\end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

XI(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化して、B が定める 2 次形式 $\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ を簡単にしましょう。

解答 まず B の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}\Phi_B(\lambda) = |\lambda I_2 - B| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2 - (-2)^2 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)\end{aligned}$$

から B の固有値は $\lambda = -1, 3$ であることが分かります。次に $\lambda = -1, 3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 3$ のとき、

$$B\vec{v} = 3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = -1$ のとき、

$$B\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

　ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$BP = (B\vec{p}_1\ B\vec{p}_2) = (3\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から $B = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は対角化できます。さらに P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned}
\left(B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(P^{-1}B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(P^{-1}BP \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\
&= 3\xi^2 - \eta^2
\end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

XI(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう。

解答 まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -4 & \lambda - 7 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-7) - (-4)^2 = (\lambda-9)(\lambda+1)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 9$ であることが分かります。次に $\lambda = -1, 9$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 9$ のとき、

$$B\vec{v} = 9\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = -1$ のとき、

$$A\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (9\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から $A = P\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ と B は回転行列 P を用いて対角化できます。ここで A が定める 2 次形式

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

を考えましょう。P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます。このことを用いると

$$\begin{aligned}(A\vec{v}, \vec{v}) &= (P^{-1}A\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= (P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}\right)\end{aligned}$$

が従います。さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \vec{v} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = 9\xi^2 - \eta^2$$

となります。

XI(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう。

解答 まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 1) - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -2, 3$ であることが分かります。次に $\lambda = -2, 3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = -2$ のとき、

$$B\vec{v} = -2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 3$ のとき、

$$A\vec{v} = 3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1\ 3\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は回転行列 P を用いて対角化できます。ここで A が定める 2 次形式

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

を考えましょう。P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます。このことを用いると

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{v}) &= (P^{-1}A\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= (P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v} \right) \end{aligned}$$

が従います。さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \vec{v} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = -2\xi^2 + 3\eta^2$$

となります。

XI(5) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう。

解答 まず A の固有値を求めます。

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 3 \\ 3 & \lambda - 11 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 3)(\lambda - 11) - 4 = (\lambda - 2)(\lambda - 12)$$

から A の固有値は $\lambda = 2, 12$ であることが分かります。次に $\lambda = 2, 12$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 2$ のとき、

$$B\vec{v} = 2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 3y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 12$ のとき、

$$A\vec{v} = 12\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (2\vec{p}_1\ 12\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は回転行列 P を用いて対角化できます。ここで A が定める 2 次形式

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

を考えましょう。P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます。このことを用いると

$$\begin{aligned}(A\vec{v}, \vec{v}) &= (P^{-1}A\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= (P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}\right)\end{aligned}$$

が従います。さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \vec{v} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = 2\xi^2 + 12\eta^2$$

となります。

第 8 章演習解答