# 3つのベクトルの線型独立性

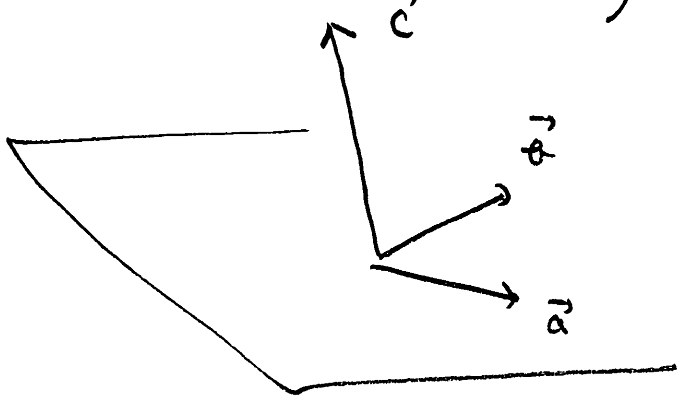
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ はLI} \underset{\text{定義}}{\iff} \left( x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow x = y = z = 0 \right)$$

を示した。そして

**定理** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はLI $\Longrightarrow \left( \vec{a} \nparallel \vec{b} \text{ かつ } \vec{c} \notin L(\vec{a}, \vec{b}) \right)$

も示した。




まず逆(⇐)を示そう。

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$$

とする。$z \neq 0$ とすると $\vec{c} = -\frac{x}{z}\vec{a} - \frac{y}{z}\vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ から

$\vec{c} \notin L(\vec{a}, \vec{b})$ に反する。よって $\boxed{z = 0}$。このとき

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$$

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から $\boxed{x = y = 0}$ 以上より $\left( x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow x = y = z = 0 \right)$

従って $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はLI。

---

例をみておこう。(LA2024L05_0507 の小テストから)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} -8 \\ 14 \\ -14 \\ 24 \end{pmatrix}$$

とすると 行基本変形

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ |\ \vec{p}) \to \cdots \to \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

から $\vec{p} = -2\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c}$ を示した。この変形から行基本変形

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \mid \vec{0}) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right)$$

が従う。4列目の $\vec{0}$ はいかなる行基本変形によっても $\vec{0}$ のままだからである。これから

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \iff x = y = z = 0$$

が従うので $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はLIであることが分かる。

以上から次の定理が分かるはずである。

**定理** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ と行基本変形できる

$\Longrightarrow$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はLI.

この逆も成立する。(ここが大事である)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ がLIとする。$\vec{a} = \vec{0}$ とすると $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$

と非自明な線型関係が存在するので $\vec{a} \neq \vec{0}$

アルゴリズムに従って上から $\neq 0$ をさがそう。$a_i \neq 0,\ a_j = 0\ (j < i)$ とする

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i \\ * \end{pmatrix} \xrightarrow[1r \leftrightarrow ir]{} \begin{pmatrix} a_i \\ * \end{pmatrix} \xrightarrow[1r \times = \frac{1}{a_i}]{} \begin{pmatrix} 1 \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{jr += 1r \times (-a_j') \\ (2 \leq j \leq n)}]{} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

と変形していくと

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & b_1' & c_1' \\ 0 & b_2' & c_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

と変形できる

$$\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & b_1' & \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} b_2' \\ \vdots \\ b_n' \end{matrix}} & \cdots \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

上の $\boxed{\begin{matrix} b_2' \\ \vdots \\ b_n' \end{matrix}}$ のエリアに着目する. $\begin{pmatrix} b_2' \\ \vdots \\ b_n' \end{pmatrix} = \vec{0}$ とすると

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \iff x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x + y b_1' = 0$$

において $x = -b_1'$, $y = 1$ が非自明解となるので $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ に反する

( $\boxed{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ が LI} \Rightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b}}$ に注意しよう ) 従って

$$\begin{pmatrix} b_2' \\ \vdots \\ b_n' \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

がわかります.

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1' \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ & b_k' \\ 0 & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行} \leftrightarrow k\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & b_1' \\ 0 & b_k' \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b_1' \\ 0 & 1 \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

において $b_k' \neq 0$ とすると 上のように行基本変形できます. さらに

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1'' \\ 0 & 1 & c_2'' \\ 0 & 0 & c_3'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c_n'' \end{pmatrix}$$

と行基本変形されたとします. ここで $\begin{pmatrix} c_3'' \\ \vdots \\ c_n'' \end{pmatrix} = \vec{0}$ とすると

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \iff x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c_1'' \\ c_2'' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + z c_1'' = 0 \\ y + z c_1'' = 0 \end{cases}$$

が分かり 非自明解 $x = -c_1''$, $y = -c_2''$, $z = 1$ が存在することになります。これは $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ がLIであることに反します。

よって $\begin{pmatrix} c_3'' \\ \vdots \\ c_n'' \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ i.e. $\exists_l \; 3 \leq l \leq n \quad c_l'' \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1'' \\ 0 & 1 & c_2'' \\ 0 & 0 & c_3'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & & c_l'' \\ 0 & 0 & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{3r \leftrightarrow lr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1'' \\ 0 & 1 & c_2'' \\ 0 & 0 & c_l'' \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1'' \\ 0 & 1 & c_2'' \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できました。

**定理** $\vec{a} \nparallel \vec{b} \Longleftrightarrow (\vec{a}\ \vec{b}) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2)$ と行基本変形できる

**定理** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はLI $\Longleftrightarrow (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ ——