

教科書第1章演習問題解答

演習 1.01 (教科書 2p) 次のベクトルの計算をしましょう.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix} \quad (3) 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (4) 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(5) 6 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (6) 9 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \quad (7) 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

解答 (1) $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} -6 \\ -24 \\ 44 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 12 \\ -36 \\ 15 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

演習 1.02 (教科書 2p)

4次元ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して, 第2成分と第3成分が何か答えましょう.

解答 第2成分 = -5, 第3成分 = 3

演習 1.03 (教科書 3p)

(1.3) の残りの公式

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}, \quad 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

を証明しましょう.

解答 $\vec{x} = (x_i)$ と第 i 成分を用いて表現します. このとき

$$\vec{x} + \vec{0} = (x_1) + (0) = (x_i + 0) = (x_i) = \vec{x}$$

$$\vec{0} + \vec{x} = (0) + (x_i) = (0 + x_i) = (x_i) = \vec{x}$$

$$0 \cdot \vec{x} = 0(x_i) = (0 \cdot x_i) = (0) = \vec{0}$$

演習 1.04 (教科書 3p) (1.4) すなわち

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$$

を証明しましょう.

解答 $\vec{x} = (x_i)$, $\vec{y} = (y_i)$ と第 i 成分を用いて表現します。このとき

$$\begin{aligned}\vec{x} - \vec{y} &= (x_i) - (y_i) = (x_i - y_i) \\ \vec{x} + (-\vec{y}) &= (x_i) + (-y_i) = (x_i - y_i)\end{aligned}$$

から $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$ が示されます。

演習 1.05 (教科書 4p) 定理 1.1 の (2) すなわち $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ と $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\lambda(\mu\vec{a}) &= (\lambda\mu)\vec{a} \\ (\lambda + \mu)\vec{a} &= \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) &= \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}\end{aligned}$$

を示しましょう。

解答 $\vec{a} = (a_i)$, $\vec{b} = (b_i)$ と第 i 成分を用いて表現します。このとき

$$\begin{aligned}\lambda(\mu\vec{a}) &= \lambda(\mu \cdot a_i) = (\lambda(\mu \cdot a_i)) = ((\lambda\mu) \cdot a_i) = (\lambda\mu)\vec{a} \\ (\lambda + \mu)\vec{a} &= (\lambda + \mu)(a_i) = ((\lambda + \mu)a_i) = (\lambda a_i + \mu a_i) = (\lambda a_i) + (\mu a_i) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) &= \lambda((a_i) + (b_i)) = \lambda(a_i + b_i) = (\lambda(a_i + b_i)) = (\lambda a_i + \lambda b_i) = (\lambda a_i) + (\lambda b_i) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}\end{aligned}$$

演習 1.06 (教科書 5p)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbf{R}^3$ のスカラー倍の和で表しましょう。

解答

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

演習 1.07 (教科書 5p) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して次の計算をしましょう。

$$(1) (2\vec{a} - \vec{b}) + 4\vec{a} - 2\vec{b} \quad (2) 3(2\vec{a} + \vec{b}) - 2(4\vec{a} - 2\vec{b})$$

解答 (1) $6\vec{a} - 3\vec{b}$ (2) $-2\vec{a} + 7\vec{b}$

演習 1.08 (教科書 5p) $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ が関係式

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1) \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{b} & (2) \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} = \vec{c} & (3) \end{cases}$$

満たしているとします. このとき $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表しましょう.

解答

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1) \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{b} & (2) \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} = \vec{c} & (3) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1)_1 = (1) \\ 3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b} & (2)_1 = (2) - 2 \times (1) \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (3)_1 = (3) - 3 \times (1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1)_2 = (1)_1 \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (2)_2 = (3)_1 \\ 3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b} & (3)_2 = (2)_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \vec{x} - 3\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{c} & (1)_3 = (1)_2 + (2)_2 \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (2)_3 = (2)_2 \\ 10\vec{z} = 7\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} & (3)_3 = (3)_2 - 3 \times (2)_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \vec{x} - 3\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{c} & (1)_4 = (1)_3 \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (2)_4 = (2)_3 \\ \vec{z} = \frac{7}{10}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} - \frac{3}{10}\vec{c} & (3)_4 = \frac{1}{10} \times (3)_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \vec{x} = \frac{1}{10}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b} + \frac{1}{10}\vec{c} & (1)_5 = (1)_4 + 3 \times (3)_4 \\ \vec{y} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} & (2)_5 = (2)_4 + 5 \times (3)_4 \\ \vec{z} = \frac{7}{10}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} - \frac{3}{10}\vec{c} & (3)_5 = (3)_4 \end{cases} \end{aligned}$$

演習 1.09 (教科書 7p) (1.16) すなわち $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbf{R}^n)^*$ と $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\vec{x} = \mathbf{a}\vec{x} + \mathbf{b}\vec{x}, \quad (\lambda\mathbf{a})\vec{x} = \lambda(\mathbf{a}\vec{x})$$

が成立することを示しましょう。

解答

$$\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\vec{x} = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)x_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i = \mathbf{a}\vec{x} + \mathbf{b}\vec{x}$$

$$(\lambda\mathbf{a})\vec{x} = \sum_{i=1}^n (\lambda a_i)x_i = \sum_{i=1}^n \lambda a_i x_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i x_i = \lambda(\mathbf{a}\vec{x})$$

演習 1.10 (教科書 8p) $\mathbf{a} \in (\mathbf{R}^n)^*$ とします。

$$\Phi_{\mathbf{a}}(\vec{x}) = 0$$

がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して成立するならば $\mathbf{a} = \mathbf{0} := (0 \ \cdots \ 0)$ が成立することを示しましょう。

解答 $\mathbf{a} = (a_1 \ \cdots \ a_n) \in (\mathbf{R}^n)^*$ とします。このとき、標準単位ベクトル \vec{e}_i に対して

$$\Phi_{\mathbf{a}}(\vec{e}_i) = a_i = 0$$

となります。これすべての i に対して成立するので

$$\mathbf{a} = (0 \ \cdots \ 0) = \mathbf{0}$$

が従います。

演習 1.11 (教科書 9p) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して ${}^t\vec{a} \cdot \vec{w}$ を計算しましょう。

解答

$${}^t\vec{a} \cdot \vec{w} = (1 \ -2 \ 3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - 2y + 3z$$

演習 1.12 (教科書 9p) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell \in \mathbf{R}^n$ と $c_1, \dots, c_\ell \in \mathbf{R}$ に対して

$${}^t(c_1\vec{a}_1 + \dots + c_\ell\vec{a}_\ell) = c_1{}^t\vec{a}_1 + \dots + c_\ell{}^t\vec{a}_\ell \quad (1)$$

を証明しましょう。

解答 帰納的に

$${}^t(\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_\ell) = {}^t\vec{a}_1 + \dots + {}^t\vec{a}_\ell$$

が成立することが示せます。実際

$${}^t(\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_{\ell-1} + \vec{a}_\ell) = {}^t(\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_{\ell-1}) + {}^t\vec{a}_\ell = {}^t\vec{a}_1 + \dots + {}^t\vec{a}_{\ell-1} + {}^t\vec{a}_\ell$$

と証明できます。これを用いると

$${}^t(c_1\vec{a}_1 + \dots + c_\ell\vec{a}_\ell) = {}^t(c_1\vec{a}_1) + \dots + {}^t(c_\ell\vec{a}_\ell) = c_1{}^t\vec{a}_1 + \dots + c_\ell{}^t\vec{a}_\ell$$

となります。これが示すべき式です。

演習 1.13 (教科書 10p) 4次元ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して (\vec{a}, \vec{b}) , (\vec{b}, \vec{c}) , (\vec{c}, \vec{a}) を計算しましょう。次に $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\|\vec{c}\|$ を計算しましょう。

解答

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -11$$

$$(\vec{b}, \vec{c}) = 2 \cdot 6 + 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 1 = -4$$

$$(\vec{c}, \vec{a}) = 6 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 1$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{30}$$

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{47}$$

演習 1.14 (教科書 12p) (1.27) すなわち非負の実数 $A_1, \dots, A_n \geq 0$ に対して

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0 \implies A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0 \quad (2)$$

が成立することを $n = 2$ に対して示しましょう。一般の n の場合を数学的帰納法により証明しましょう。

解答 ($n = 2$ の場合) $A_1 + A_2 = 0$ が成立するとします。 $A_1 \neq 0$ とします。 $A_2 = -A_1 \leq 0$ となりますから、 $A_2 < 0$ が従います。これは $A_2 \geq 0$ に反しますから、 $A_2 = 0$ であることが分かります。さらに $A_1 = -A_2 = 0$ も従います。

(一般の場合) $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 0$ が成立するとします. ここで $A_n \neq 0$ とします.

$$A_n = -A_1 - A_2 - \cdots - A_{n-1} \leq 0$$

から $A_n < 0$ が従います. これは $A_n \geq 0$ に反しますから, $A_n = 0$ であることが分かります. さらに $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 0$ に代入すると

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} = 0$$

が従います. 帰納法の仮定から $A_1 = \cdots = A_{n-1} = 0$ が成立することが分かります.

演習 1.15 (教科書 12p) 大きさが 1 のベクトルを **単位ベクトル** と呼びます. $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{x} \neq \vec{0}$ であるとき $\vec{x}_0 = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x}$ が単位ベクトルとなることを証明しましょう.

解答

$$\|\vec{x}_0\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x} \right\| = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \|\vec{x}\| = 1$$

から \vec{x}_0 が単位ベクトルであることが分かります.

演習 1.16 (教科書 12p) $\vec{a} = {}^t(1 \ -1 \ 3)$, $\vec{b} = {}^t(2 \ 1 \ -1)$ に対して

$$f(t) = \|\vec{b} - t\vec{a}\|^2$$

を考えます. このとき公式 (1.28) を用いて $f(t)$ の最小値を求めましょう.

解答 まず

$$\|\vec{a}\|^2 = 11, \quad (\vec{a}, \vec{b}) = -2, \quad \|\vec{b}\|^2 = 6$$

と計算します. これを用いると

$$\begin{aligned} f(t) &= \|\vec{b}\|^2 - 2t(\vec{a}, \vec{b}) + t^2\|\vec{a}\|^2 \\ &= 11t^2 + 4t + 6 \\ &= 11 \left(t + \frac{2}{11} \right)^2 + 6 - \frac{4}{11} \end{aligned}$$

と平常完成すると $t = -\frac{2}{11}$ のときに最小値 $6 - \frac{4}{11} = \frac{62}{11}$ をとることが分かります.

演習 1.17 (教科書 13p) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + 2(\vec{c}, \vec{a})$$

を示しましょう。

解答

$$\begin{aligned}\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2 &= \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + 2(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) + \|\vec{c}\|^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + \|\vec{b}\|^2 + 2(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + \|\vec{c}\|^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + 2(\vec{a}, \vec{c})\end{aligned}$$

演習 1.18 (教科書 13p) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ とします。 $\vec{a} \perp \vec{b}$, かつ $\vec{a} \perp \vec{c}$ ならば

$$\vec{a} \perp (\lambda\vec{b} + \mu\vec{c})$$

が成立することを示しましょう。

解答 $\vec{a} \perp \vec{b}$, かつ $\vec{a} \perp \vec{c}$ ならば $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = 0$ が成立します。このとき

$$(\vec{a}, \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}) + \mu(\vec{a}, \vec{c}) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

となりますが、これは $\vec{a} \perp (\lambda\vec{b} + \mu\vec{c})$ を意味します。

演習 1.19 (教科書 13p) $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して垂直、すなわち

$$(\vec{a}, \vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

が成立するとします。このとき $\vec{a} = \vec{0}$ となることを示しましょう。

解答 $\vec{x} = \vec{a}$ とすると

$$0 = (\vec{a}, \vec{a}) = \|\vec{a}\|^2$$

から $\vec{a} = \vec{0}$ が従います。

演習 1.20 (教科書 13p) $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \in \mathbf{R}^n$ が

$$(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとします. このとき $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ は正規直交系であるといいます.

(1) $\|x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2\|^2 = x^2 + y^2$, $\|x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 + z\vec{f}_3\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ を示しましょう.

(2) $\vec{g} \in \mathbf{R}^n$ に対して $\|\vec{g} - x\vec{f}_1 - y\vec{f}_2\|^2 = \|\vec{g}\|^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f}_1) - 2y(\vec{g}, \vec{f}_2)$,

$$\|\vec{g} - x\vec{f}_1 - y\vec{f}_2 - z\vec{f}_3\|^2 = \|\vec{g}\|^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f}_1) - 2y(\vec{g}, \vec{f}_2) - 2z(\vec{g}, \vec{f}_3)$$

を示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned} \|x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2\|^2 &= \|x\vec{f}_1\|^2 + 2(x\vec{f}_1, y\vec{f}_2) + \|y\vec{f}_2\|^2 \\ &= x^2\|\vec{f}_1\|^2 + 2xy(\vec{f}_1, \vec{f}_2) + y^2\|\vec{f}_2\|^2 \\ &= x^2 \cdot 1 + 2xy \cdot 0 + y^2 \cdot 1 = x^2 + y^2 \\ \|x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 + z\vec{f}_3\|^2 &= \|x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2\|^2 + 2(x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2, z\vec{f}_3) + \|z\vec{f}_3\|^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2xz(\vec{f}_1, \vec{f}_3) + 2yz(\vec{f}_2, \vec{f}_3) + z^2\|\vec{f}_3\|^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2xz \cdot 0 + 2yz \cdot 0 + z^2 \cdot 1 = x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \|\vec{g} - x\vec{f}_1 - y\vec{f}_2\|^2 &= \|\vec{g}\|^2 - 2(x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2, \vec{g}) + \|x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2\|^2 \\ &= \|\vec{g}\|^2 - 2x(\vec{f}_1, \vec{g}) - 2y(\vec{f}_2, \vec{g}) + x^2 + y^2 \\ &= \|\vec{g}\|^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f}_1) - 2y(\vec{g}, \vec{f}_2) \end{aligned}$$

演習 1.21 (教科書 14p) (1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して, \vec{a} と \vec{b} が平行であるとき μ を

求めましょう.

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して, \vec{a} と \vec{b} は平行とならないことを示しましょう.

解答 (1)

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 & (i) \\ -2x - 4y = 0 & (ii) \\ -4x + \mu y = 0 & (iii) \end{cases}$$

である. (iii) + 4 × (i) を考えると

$$(\mu + 8)y = 0$$

となります. $\mu \neq -8$ ならば $y = 0$ となり, さらに (i) から $x = -2y = 0$ が従いますから $\vec{a} \parallel \vec{b}$ となります. 以上で $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ならば $\mu = -8$ であることが示されました. 逆に $\mu = -8$ のとき

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\vec{a}$$

から $\vec{a} \parallel \vec{b}$ であることが従います.

(2)

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 & (i) \\ -3x - 4y = 0 & (ii) \\ -4x + \mu y = 0 & (iii) \end{cases}$$

であることに注意します. (ii) + 3 × (i) を考えると

$$2y = 0 \quad \text{従って} \quad y = 0$$

となります. さらに (i) から $x = -2y = 0$ も分かります. 以上で $\vec{a} \parallel \vec{b}$ であることが示されました.

演習 1.22 (教科書 14p) $\vec{a}, \vec{0} \in \mathbf{R}^n$ は常に平行であることを証明しましょう。

解答

$$0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

なので $\vec{a} \parallel \vec{0}$ であることが分かります。

演習 1.23 (教科書 14p) $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が平行でないとします。このとき次を示しましょう。

$$\vec{x} \nparallel (\lambda\vec{x} + \vec{y}), \quad (\vec{x} + \vec{y}) \nparallel (\vec{x} - \vec{y})$$

解答

$$c_1\vec{x} + c_2(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = (c_1 + \lambda c_2)\vec{x} + c_2\vec{y}$$

であることに注意します。 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ から $c_1\vec{x} + c_2(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0}$ ならば $c_1 + \lambda c_2 = c_2 = 0$ が従います。 $c_1 = -\lambda c_2 = 0$ から $c_1 = c_2 = 0$ となりますから、 $\vec{x} \parallel (\lambda\vec{x} + \vec{y})$ であることが分かります。同様に

$$c_1(\vec{x} + \vec{y}) + c_2(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$$

とすると

$$c_1(\vec{x} + \vec{y}) + c_2(\vec{x} - \vec{y}) = (c_1 + c_2)\vec{x} + (c_1 - c_2)\vec{y}$$

に注意すると

$$c_1 + c_2 = c_1 - c_2 = 0$$

が従います。 $c_1 = \frac{1}{2}((c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)) = 0$ 、さらに $c_2 = -c_1 = 0$ も分かります。以上で $(\vec{x} + \vec{y}) \nparallel (\vec{x} - \vec{y})$ が示されました。

演習 1.24 (教科書 14p) 次のベクトル \vec{a} と \vec{b} に対して、 \vec{b} の \vec{a} 方向の正射影を求めましょう。

$$(1) \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2) \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3) \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解答 求める正射影 (直交射影) ベクトルを \vec{w} とします。

(1)

$$\vec{w} = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = \frac{2}{3} \vec{a}$$

(2)

$$\vec{w} = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = \frac{1}{2} \vec{a}$$

(3)

$$\vec{w} = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = -\frac{1}{4} \vec{a}$$

演習 1.25 (教科書 23p) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ は平行でないとして, $\vec{p}, \vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ を

$$\vec{p} = c_1\vec{a} + d_1\vec{b}, \quad \vec{q} = c_2\vec{a} + d_2\vec{b}$$

と定めます. ここで $\Delta := c_1d_2 - c_2d_1 \neq 0$ と仮定します.

(1) 等式 $\vec{a} = \frac{1}{\Delta}(d_2\vec{p} - d_1\vec{q})$, $\vec{b} = \frac{1}{\Delta}(-c_2\vec{p} + c_1\vec{q})$ を示しましょう.

(2) $L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{p}, \vec{q})$ を示しましょう.

(3) $x\vec{a} + y\vec{b} = s\vec{p} + t\vec{q}$ であるとき

$$s = \frac{1}{\Delta}(xd_2 - yc_2), \quad t = \frac{1}{\Delta}(-xd_1 + yc_1)$$

と座標変換の公式が得られることを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{cases} \vec{p} = c_1\vec{a} + d_1\vec{b} & (i) \\ \vec{q} = c_2\vec{a} + d_2\vec{b} & (ii) \end{cases}$$

と番号をつけます. $(i) \times d_2 - (ii) \times d_1$ と $(i) \times (-c_2) + (ii) \times c_1$ から

$$d_2\vec{p} - d_1\vec{q} = (c_1d_2 - c_2d_1)\vec{a} = \Delta\vec{a}$$

$$-c_2\vec{p} + c_1\vec{q} = (-c_2d_1 + c_1d_2)\vec{b} = \Delta\vec{b}$$

となります. $\Delta \neq 0$ を仮定していますから

$$\vec{a} = \frac{1}{\Delta}(d_2\vec{p} - d_1\vec{q}), \quad \vec{b} = \frac{1}{\Delta}(-c_2\vec{p} + c_1\vec{q})$$

が従います.

(2) 任意の $\vec{w} \in L(\vec{p}, \vec{q})$ は

$$\vec{w} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}$$

と表され

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \xi(c_1\vec{a} + c_2\vec{b}) + \eta(d_1\vec{a} + d_2\vec{b}) \\ &= (\xi c_1 + \eta d_1)\vec{a} + (\xi c_2 + \eta d_2)\vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

から $L(\vec{p}, \vec{q}) \subset L(\vec{a}, \vec{b})$ であることが分かります. さらに任意の $\vec{v} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ は

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

と表され

$$\begin{aligned} \vec{v} &= x \cdot \frac{1}{\Delta}(d_2\vec{p} - d_1\vec{q}) + y \cdot \frac{1}{\Delta}(-c_2\vec{p} + c_1\vec{q}) \\ &= \frac{1}{\Delta}(xd_2 - yc_2)\vec{p} + \frac{1}{\Delta}(-xd_1 + yc_1)\vec{q} \in L(\vec{p}, \vec{q}) \end{aligned}$$

から $L(\vec{a}, \vec{b}) \subset L(\vec{p}, \vec{q})$ であることが分かります. 以上で

$$L(\vec{p}, \vec{q}) = L(\vec{a}, \vec{b})$$

(3) $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ なので

$$s\vec{p} + t\vec{q} = x \cdot \frac{1}{\Delta} (d_2\vec{p} - d_1\vec{q}) + y \cdot \frac{1}{\Delta} (-c_2\vec{p} + c_1\vec{q}) = \frac{1}{\Delta} (xd_2 - yc_2)\vec{p} + \frac{1}{\Delta} (-xd_1 + yc_1)\vec{q}$$

から

$$s = \frac{1}{\Delta} (xd_2 - yc_2), \quad t = \frac{1}{\Delta} (-xd_1 + yc_1)$$

が従います。

演習 1.26 (教科書 25p) 演習 1.24(3) の \vec{a} と \vec{b} を考えます。 $\vec{g} = {}^t(1\ 0\ 0\ 0)$ に対して \vec{g} の $L(\vec{a}, \vec{b})$ への正射影 (直交射影) ベクトル \vec{v}_0 を求めましょう。

解答 まず \vec{a} と \vec{b} に GS の直交化を適用して $L(\vec{a}, \vec{b})$ の正規直交基底を求めます。 \vec{b} の \vec{a} 方向の直交射影 \vec{w} は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = -\frac{1}{4} \vec{a}$$

と求まります。 さらに \vec{a} に垂直な

$$\vec{b} - \vec{w} = {}^t(1\ 0\ -1\ 1) + \frac{1}{4} {}^t(1\ 1\ 1\ -1) = \frac{1}{4} {}^t(5\ 1\ -3\ 3)$$

と求まります。 お互いに直交する \vec{a} と $\vec{b} - \vec{w}$ を大きさ 1 にした

$$\vec{p} := \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{2} {}^t(1\ 1\ 1\ -1), \quad \vec{q} := \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} (\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{44}} {}^t(5\ 1\ -3\ 3)$$

が $L(\vec{a}, \vec{b})$ の正規直交基底になります。 さらに

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= (\vec{p}, \vec{g})\vec{p} + (\vec{q}, \vec{g})\vec{q} \\ &= \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が \vec{g} の $L(\vec{a}, \vec{b})$ への直交射影となります。