指数関数と対数関数の極限

<u>$a>1$ のとき</u>
$$a^x \longrightarrow +\infty \quad (x \longrightarrow +\infty)$$
$$a^x \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow -\infty)$$

$a>1$ のとき $a^n \longrightarrow +\infty \quad (n \longrightarrow +\infty)$ に注意.

${}^\forall R>0$ に対して ${}^\exists N \quad n \geqq N \Rightarrow a^n > R$

この状況で $x > N+1$ とすると

$$N \leqq n \leqq x < n+1$$

を満たす自然数 n が存在して

$$a^x \geqq a^n > R$$

<u>まとめると</u> ${}^\forall R>0$ に対して $x>N+1 \Rightarrow a^x > R$

これは $a^x \longrightarrow +\infty \quad (x \longrightarrow +\infty)$ を意味する.

定理 $f(t) \neq 0, \ f(t) \longrightarrow +\infty \quad (t \longrightarrow +\infty)$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(t)} \longrightarrow 0$$

を用いると $y=-x$ とおくと $x \longrightarrow -\infty$ のとき $y \longrightarrow +\infty$ で

$$e^x = e^{-y} = \frac{1}{e^y} \longrightarrow 0$$

が従う.

<u>$a>1$ のとき.</u>

$x \to +\infty$ のとき $\log_a x \to +\infty$

$x \to +0$ のとき $\log_a x \to -\infty$

$\forall R>0$ に対して $R' = a^R$ とおくと $R'>0$ で

$x > R' = a^R \Rightarrow \log_a x > \log_a a^R = R$

これは $\log_a x \to +\infty \ (x \to +\infty)$ を意味する.

$x \to +0$ のとき $y = \frac{1}{x}$ とすると $y \to +\infty$ で

$\log_a x = -\log_a y \to -\infty$

が従う.

<u>$a>0$ のとき.</u>

$x^a \to +\infty \quad (x \to +\infty)$

$x^a \to 0 \quad (x \to +0)$

$x^a = e^{a\log x}$ において $x \to +\infty$ のとき $a\log x \to +\infty$ 従って

$x^a = e^{a\log x} \to +\infty$, 一方 $x \to +0$ のとき $a\log x \to -\infty$ なので

$x^a = e^{a\log x} \to 0$.

<u>$a<0$ のとき</u> $x^a \to 0 \ (x \to +\infty)$, $x^a \to +\infty \ (x \to +0)$

$a = -b$ とおくと $x^a = \frac{1}{x^b}$ で $x \to +\infty$ のとき $x^b \to +\infty$ から $x^a \to 0$

$x^b > 0$ で $x \to +0$ とき $x^b \to +0$ から $x^a = \frac{1}{x^b} \to +\infty$.

注意　$f(t)>0$ で $t \to *$ のとき $f(t) \to 0$ のとき $\dfrac{1}{f(t)} \to +\infty$

定理1　$a>1$ のとき $k>0$ ならば $(k=1,2,\dots)$

$$\frac{n^k}{a^n} \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$$

これは $k=1$ のときすでに示している.

定理2　$k=1,2,\dots$　$a>1$ のとき. $\dfrac{t^k}{a^t} \longrightarrow 0 \quad (t \to +\infty)$

定理1から $\forall \varepsilon>0$ に対して $\exists N$ が存在して $0<\dfrac{n^k}{a^n}<\varepsilon \cdot a \; (n \geqq N)$

$x \geqq N+1$ とすると　$N \leqq n \leqq x \leqq n+1$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する. このとき

$$t^k \leqq (n+1)^k$$

$$a^n \leqq a^t \leqq a^{n+1}$$

で

$$0<\frac{t^k}{a^t}<\frac{(n+1)^k}{a^n}=a \cdot \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}<\varepsilon$$

まとめると　$t \geqq N+1 \Rightarrow 0<\dfrac{t^k}{a^t}<\varepsilon$

これは $\dfrac{t^k}{a^t} \longrightarrow 0 \; (t \to +\infty)$ を意味する.

$a>1$ のとき
$$\frac{\log_a t}{t} \longrightarrow 0 \quad (t \to +\infty)$$

$x = \log_a t$ とすると $t = a^x$ で $t \to +\infty$ のとき $x \to +\infty$

このとき

$$\frac{\log_a t}{t} = \frac{x}{a^x} \longrightarrow 0$$

が従う.

$$\boxed{\begin{array}{l} a>1 \text{ のとき. } \alpha>0 \text{ のとき} \\ t^\alpha \log_a t \longrightarrow 0 \quad (t \to +0) \end{array}}$$

$-\log_a t = x$ とすると $t \to +0$ のとき $x \to +\infty$ $t = a^{-x}$ となる

$$t^\alpha \log_a t = a^{-\alpha x} x = \frac{x}{e^{\alpha x}}$$

$y = \alpha x$ とすると $\alpha > 0$ から $y \to +\infty$ で

$$\frac{x}{e^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{y}{e^y} \longrightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot 0$$