効用関数のスケール変換

例1. $u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$, $I - px - qy = 0$ の下で最大化.

(x, y) で極値をとるとき ある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{cases} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} + \lambda(-p) = 0 \\ \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} + \lambda(-q) = 0 \\ I - px - qy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 3\lambda p & (1) \\ x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} = \frac{3\lambda q}{2} & (2) \\ I - px - qy = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \times x$, $(2) \times y$ から $3\lambda p x = \frac{3\lambda}{2} q y = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$

1において $\lambda \neq 0$ ((1)に $\lambda = 0$ を代入して分かる) なので

$$px = \frac{1}{2} qy$$

となる. (3)から $px = \frac{1}{3} I$, $qy = \frac{2}{3} I$ すなわち $\begin{cases} x = \frac{I}{3p} \\ y = \frac{2I}{3q} \end{cases}$

例2. $U(x, y) = \log u(x) = \frac{1}{3}\log x + \frac{2}{3}\log y$, $I - px - qy = 0$ の下で最大化する.

(x, y) で極大値をとるとき, ある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \lambda(-p) = 0 & (1) \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{y} + \lambda(-q) = 0 & (2) \\ I - px - qy = 0 & (3) \end{cases}$$

(1), (2) から

$$x = \frac{1}{3p\lambda}, \quad y = \frac{2}{3q\lambda}$$

これを (3) に代入すると

$$I - \frac{1}{3\lambda} - \frac{2}{3\lambda} = I - \frac{1}{\lambda} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda = \frac{1}{I}$$

これから

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3q}$$

一般論　$F'(u) > 0$, $U = F(u(x,y))$ とする

$$\begin{cases} u_x(a,b) + \lambda(-p) = 0 & (1) \\ u_y(a,b) + \lambda(-q) = 0 & (2) \\ I - pa - qb = 0 \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在すると仮定する

$$U_x = F'(u(x,y))\, u_x, \quad U_y = F'(u(x,y)) \cdot u_y$$

$$U_x(a,b) = F'(u(a,b)) \cdot u_x(a,b)$$

$$U_y(a,b) = F'(u(a,b)) \cdot u_y(a,b)$$

なので (1), (2) に $F'(u(a,b))$ をかけると

$$\begin{cases} U_x(a,b) + F'(u(a,b))\lambda(-p) = 0 \\ U_y(a,b) + F'(u(a,b))\lambda(-q) = 0 \\ I - pa - qb = 0 \end{cases}$$

ここで $\Lambda = F'(u(a,b))\lambda$ とおくとよい. これから u と U が定める需要関数が同じであることが分かる.