関数の収束（言い換え）　$a<c<b$

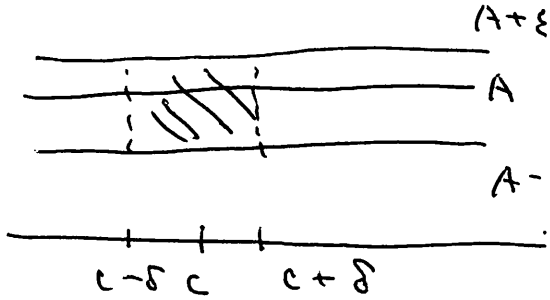
①　$f: (a, c)\cup(c, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

に対して

$$f(t) \longrightarrow A\in\mathbb{R}\quad (t\to c)$$

$\iff$　$t_n\in(a, b)$, $t_n\neq c$, $t_n\to c\ (n\to+\infty)$ ならば

$$f(t_n)\longrightarrow A$$



言い換え
$\iff$　$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$

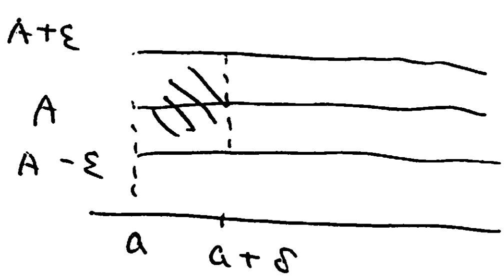
$$0<|t-c|<\delta \Longrightarrow A-\varepsilon<f(t)<A+\varepsilon$$

②（右極限）　$f: (a, b)\longrightarrow\mathbb{R}$ に対して

$$f(t)\longrightarrow A\quad (t\to a+0)$$

$\iff$　$t_n\in(a, b)$, $t_n\to a\ (n\to+\infty)$

$$\Longrightarrow f(t_n)\longrightarrow A$$



$\iff$　$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$
言い換え

$$a<t<a+\delta \Longrightarrow A-\varepsilon<f(t)<A+\varepsilon$$

注　①, ② ともに $\iff$ については時間が許せば説明する。

片方だけは重要な応用があるので説明するかもしれない。

② のつづき　すでに数列を用いた定義を用いて

$$\sqrt{t} \to 0 \quad (t \to +0)$$

を示した。ここは他方の定義を用いて示そう。$\forall \varepsilon > 0$ とする。

$t > 0$ のとき。

$$|\sqrt{t} - 0| < \varepsilon$$

は　$0 < \sqrt{t} < \varepsilon$　従って　$0 < t < \varepsilon^2$ と同値である。

$\delta = \varepsilon^2 > 0$ とすると

$$0 < t < \delta := \varepsilon^2 \Longrightarrow -\varepsilon < \sqrt{t} - 0 < \varepsilon$$

である　これは　$\sqrt{t} \to 0 \quad (t \to t+0)$ を意味する。