偏微分係数と極大・極小の必要条件

微分積分 2024 L01, Part 1–Part 4

Nobuyuki TOSE

Oct 01, 2024

プラン

Part 01

ミクロ経済学における基本的な問題

ミクロ経済学における基本的な問題

ミクロ経済学では最初に以下の基本的な問題を学びます.

- 生産理論 (Production Theory)
- 消費者理論 (Consumer Theory)

生産理論（Production Theory）(1)

生産物 (product)C が**生産要素** (production elements) A,B から生産されるとします．
A, B, C の価格はそれぞれ p, q, r とします．A と B をそれぞれ x と y 投入するとき C が $z = f(x, y)$ 得られるとします．
このとき $f(x, y)$ を**生産関数** (production function) と呼ばれます．またこの状況で**利潤関数** (profit function) を

$$\pi(x, y) = rf(x, y) - px - qy$$

と定義します．
生産理論の最初のステップは，利潤関数 $\pi(x, y)$ を最大化して**生産要素需要関数**

$$x = x(p, q, r), y = y(p, q, r)$$

を求めることにあります．

生産理論（Production Theory）(2)

	生産要素			生産物
	A	B	$\to$	C
価格	p	q		r
量	x	y		$z = f(x, y)$

消費者理論（Consumer Theory）(1)

商品 (Goods) A,B があるとします．A を x, B を y 購入するとき，消費者が**効用関数** (utility function)$u(x,y)$ の効用を得るとします．さらに A, B の価格が p, q であるとします．
消費者が予算 I を全額消費して A,B を購入するとします．ここでの問題は**予算制約**と呼ばれる制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で $u(x,y)$ を最大化して**需要関数** (demand function)

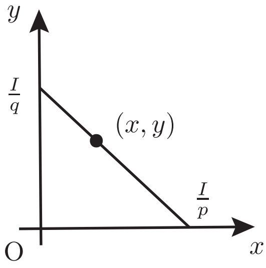
$$x = x(p,q,I), y = y(p,q,I)$$

と**所得の限界効用** (mariginal utility of income)

$$\lambda = \lambda(p,q,I)$$

を得ることです．

消費者理論（Consumer Theory）(2)



Part 02
開集合

開円盤 CT 246p

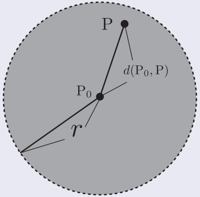
開円盤 (Open Disc)

$r > 0$, $\mathrm{P}_0(a, b) \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\}$$

を中心 P_0，半径 $r > 0$ の**開円盤**と呼びます．ここで $d(\mathrm{P}_0, \mathrm{P})$ は 2 点 P_0，P の距離です．$\mathrm{P}(x, y)$ のとき

$$d(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$



注意今後「P_0 の近くで〜」という言い方をしますが，これはある正数 $r > 0$ に対して

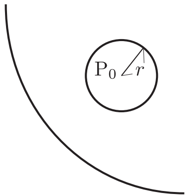
任意の$\mathrm{P} \in B_r(\mathrm{P}_0)$において〜

Definition

$\mathbf{R}^2$ の部分集合 U があるとします．U が開集合であるとは任意の $\mathrm{P}_0 \in U$ に対して $r > 0$ が存在して

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\} \subset U$$

が成立することです．



注意 U の任意の点 P_0 の周りが U に含まれているということです．

命題・命題関数 (1)

命題とは真偽が明らかな文のことです．例えば

$$\begin{array}{ll} 2 > 1 & \text{真（Truth）} \\ 1 > 2 & \text{偽（False）} \end{array}$$

集合 X 上の**命題関数**とは $x \in X$ に対して命題 $P(x)$ を対応させるものです．例えば $X = \mathbf{R}$ のとき

$$P(x): \quad 1 < x$$

と定めると

$$\begin{array}{lll} P(0): & 1 < 0 & \text{偽} \\ P(2): & 1 < 2 & \text{真} \end{array}$$

となります．

命題・命題関数 (2)

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ があるとき付随して命題を定めることができます.

$$\forall x \in X\,(P(x))$$

はすべての $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題です．前ページの例では $P(0)$ が偽ですから $\forall x \in X\,(P(x))$ は偽です.
さらに

$$\exists x \in X\,(P(x))$$

はある $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題です．前ページの例では $P(2)$ が真ですから $\exists x \in X\,(P(x))$ は真です.

命題・命題関数 (3)—重要な公式

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ に対して

$$NOT\,(\forall x \in X\ \ P(x)) \equiv \exists x \in X\ \ NOT\,(P(x))$$

$$NOT\,(\exists x \in X\ \ P(x)) \equiv \forall x \in X\ \ NOT\,(P(x))$$

開集合の例 (1)

以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合です.

- $\mathbf{R}^2$
- 上半平面

$$U_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y > 0\}$$

開集合の例 (2)

- 第 1 象限（1st Quadrant）

$$\mathbf{R}^2_{++} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x, y > 0\}$$

- 開円盤

$$B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\}$$

開集合の性質

$U_1,\ U_2$ が $\mathbf{R}^2$ の開集合ならば $U_1 \cap U_2$ も開集合である.

「開集合でない」とは(1)

$F \subset \mathbf{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} F\text{は開集合でない} &\equiv NOT\ \ (\forall \mathrm{P}_0 \in F\ \exists r > 0\ B_r(\mathrm{P}_0) \subset F) \\ &\equiv \exists \mathrm{P}_0 \in F\ \ NOT\,(\exists r > 0\ B_r(\mathrm{P}_0) \subset F) \\ &\equiv \exists \mathrm{P}_0 \in F\ \forall r > 0\ \ NOT\,(B_r(\mathrm{P}_0) \subset F) \\ &\equiv \exists \mathrm{P}_0 \in F\ \forall r > 0\ B_r(\mathrm{P}_0) \not\subset F \end{aligned}$$

「開集合でない」とは(2)

X の部分集合 A,B に対して

$$A \subset B \equiv \forall a \in A\,(a \in B)$$

なので

$$A \not\subset B \equiv \exists a \in A\ NOT\,(a \in B) \equiv \exists a \in A\,(a \notin B)$$

従って

$$F\text{は開集合でない} \equiv \exists \mathrm{P}_0 \in F\ \forall r > 0\ \exists \mathrm{P} \in B_r(\mathrm{P}_0)\,(\mathrm{P} \notin F)$$

開集合–反例 (1)

以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合ではありません．

- $\mathrm{P}_0 \in \mathbf{R}^2$ のなす集合 $\{\mathrm{P}_0\}$
- 閉上半平面

$$F_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq 0\}$$

開集合–反例 (2)

- 閉第 1 象限

$$\overline{\mathbf{R}^2_{++}} := \{(x,y)\mathbf{R}^2;\ x,y \geq 0\}$$

- 閉円盤

$$\overline{B_r(\mathrm{P}_0)} := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P},\mathrm{P}_0) \leq r\}$$

Part 03
偏微分係数と極大・極小

Partial Differentiation

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

が定義されているとします.

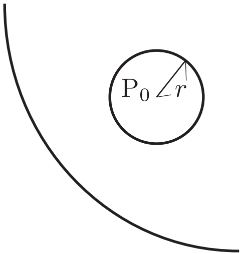
$\mathrm{P}_0(a,b) \in U$ に対して x の関数

$$F(x) := f(x,b)$$

を $x=a$ の近くで定義できます．さらに y の関数

$$G(y) := f(a,y)$$

を $y=b$ の近くで定義することができます.



Partial Differentiation

この状況で，定義の中の極限が存在すれば，x と y に関する**偏微分係数**を

$$f_x(a, b) := F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

$$f_y(a, b) := G'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

と定義できます.

Partial Differentiation-An example

$\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=x^3+2xy^2+y^3$$

について考えます．$(a,b)\in\mathbf{R}^2$ の周りで考えるとして

$$F(x):=f(x,b)=x^3+2xb^2+b^3,\ G(y):=f(a,y)=a^3+2ay^2+y^3$$

と定義します．このとき

$$F'(x)=3x^2+2b^2,\quad \text{and}\quad G'(y)=4ay+3y^2$$

から

$$f_x(a,b)=3a^2+2b^2,\quad f_y(a,b)=4ab+3b^2$$

を得ます．

1 変数の極大点（極小点）–定義

開区間 $]a, b[$ 上の関数 $f :]a, b[\Rightarrow \mathbf{R}$ が与えられているとき

f が $t = c$ で極小（resp. 極大）

$\Leftrightarrow$ ある $\delta > 0$ に対して f が $]c - \delta, c + \delta[$ 上最小（resp. 最大）

$\Leftrightarrow$ ある $\delta > 0$ に対して

$$f(t) \geq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

$$\text{resp.} f(t) \leq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

1 変数の極大点（極小点）CT 104-105p

微分可能な 1 変数関数の極小点（極大点）に関する次の定理を紹介します.

Theorem

微分可能な関数 $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ があるとします. f が $c \in]a, b[$ で極小（極大）ならば

$$f'(c) = 0$$

注意 これは中身を理解して欲しい定理です.

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

に対して，f が $\mathrm{P}_0(a,b)$ で極小（resp. 極大）であるとはある $\delta > 0$ が存在して

$$f(x,y) \geq f(a,b) \quad ((x,y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

(resp.

$$f(x,y) \leq f(a,b) \quad ((x,y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

)
が成立するときです.

Minimal (Maximal) Points–Theorem CT 269p

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

が U の各点 $\mathrm{P} \in U$ で x, y について偏微分できると仮定します.

Theorem

f が $\mathrm{P}_0(a, b) \in U$ で極小（極大）ならば

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \tag{1}$$

が成立します.

この状況で (1) を満たす点 $\mathrm{P}_0(a, b)$ を f の**停留点**と呼びます.

Minimal (Maximal) Points–Sketch of proof

f が $\mathrm{P}_0(a,b)$ で極小とします．このとき $F(x)=f(x,b)$ は $x=a$ で極小となります．
実際

$$f(x,y)\geq f(a,b)\quad ((x,y)\in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$

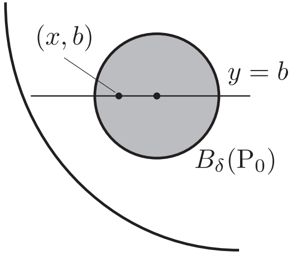
から $f(x,b)\geq f(a,b)\quad (a-\delta<x<a+\delta)$
従って

$$F(x)\geq F(a)\quad (a-\delta<x<a+\delta)$$

となります．よって

$$F'(a)=0\quad \text{従って}\quad f_x(a,b)=0$$

であることが分かります．



Minimal (Maximal) Points–An example

関数

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$$

について考えます.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x + 4y \cdot 1 + 0 - 6 - 0 \\ &= 2x + 4y - 6 = 0 \\ f_y(x, y) &= 0 + 4x \cdot 1 + 4y - 0 - 8 \\ &= 4x + 4y - 8 = 0 \end{aligned}$$

を解くと，$(x, y) = (1, 1)$ が f の唯一の停留点であることが分かります.

Part 04
クラメールの公式

クラメールの公式 CT 205-206p

連立１次方程式

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & \cdots(1) \\ cx + dy = \beta & \cdots(2) \end{cases}$$

を考える． y を消去するために $(1)\times d-(2)\times b$ を考える．

$$\begin{array}{rrcrcr} & adx & + & bdy & = & \alpha d \\ -) & bcx & + & bdy & = & \beta b \\ \hline & (ad-bc)x & & & = & \alpha d-\beta b \end{array}$$

x を消去するために $(1)\times c-(2)\times a$ を考える．

$$\begin{array}{rrcrcr} & acx & + & bcy & = & \alpha c \\ -) & acx & + & ady & = & \beta a \\ \hline & & & (bc-ad)y & = & \alpha c-\beta a \end{array}$$

行列式・クラメールの公式

行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

これを用いると

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

特に $D := \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

これを**クラメールの公式**と言います.

クラメールの公式–例

$$\begin{cases} 2x & + & 4y & = & 6 \\ 4x & + & 4y & = & 8 \end{cases}$$

を解きます.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -8 \neq 0$$

からクラメールの公式が適用できます. 実際

$$x = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(6 \cdot 4 - 8 \cdot 4) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$

$$y = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(2 \cdot 8 - 4 \cdot 6) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$