Lec 05, 2024 年 05 月 08 日演習問題解答

I 以下の数列 $\{x_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

が成立することを示しましょう.

(1) $x_n = \frac{8n^2-3}{2n+5}$ **(2)** $x_n = \frac{n^3-n}{n^2+1}$ **(3)** $x_n = \frac{4^n-2^n}{3^n+2^n}$

解答 (1)

$$x_n = \frac{8n^2-3}{2n+5} = n\cdot\frac{8n^2-3}{n(2n+5)} = n\cdot\frac{8-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{5}{n}}$$

において $n\to+\infty$ のとき

$$n\to+\infty,\quad \frac{8-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{5}{n}} \to \frac{8-0}{2+0} = 4 > 0$$

なので

$$x_n = n\cdot\frac{8-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{5}{n}} \to +\infty$$

となります.

(2)

$$x_n := \frac{n^3-n}{n^2+1} = n\cdot\frac{n^3-n}{n(n^2+1)} = n\cdot\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

において $n\to+\infty$ のとき

$$n\to+\infty,\quad \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \to \frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1 > 0$$

なので

$$x_n = n\cdot\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \to +\infty$$

(3)

$$x_n := \frac{4^n-2^n}{3^n+2^n} = \frac{4^n}{3^n}\cdot\frac{3^n(4^n-2^n)}{4^n(3^n+2^n)} = \left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

において $n\to+\infty$ のとき

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n \to +\infty,\quad \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \to \frac{1-0}{1+0} = 1 > 0$$

から

$$x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \to +\infty$$

II 以下の関数 $f(x)$ に対して極限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めましょう.

(1) $f(x) = \frac{x}{x^2+5}$ **(2)** $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ **(3)** $f(x) = \sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2+4}$ **(4)** $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+1}$ **(5)** $f(x) = \frac{x+3}{x^2+5x+6}$

解答 (1) $x \to +\infty$ のとき

$$f(x) := \frac{x}{x^2+5} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2+5} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{5}{x^2}} \to 0 \cdot \frac{1}{1+0} = 0$$

(2) $x \to +\infty$ のとき

$$f(x) := \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}} \to \frac{2+0}{1-0} = 2$$

(3) $x \to +\infty$ のとき

$$f(x) := \sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2+4} = \frac{(x^2+2x+4)-(x^2+4)}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2+4}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} \to \frac{2}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

(4)

$$f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+1} = x \cdot \frac{x^2+5x+6}{x(x+1)} = x \cdot \frac{1+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x})}$$

において $x \to +\infty$ のとき

$$x \to +\infty, \quad \frac{1+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x})} \to \frac{1+5\cdot 0+6\cdot 0}{1+0} = 1 > 0$$

であるので

$$f(x) = x \cdot \frac{1+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x})} \to +\infty$$

(5) $x \to +\infty$ のとき

$$f(x) := \frac{x+3}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x(x+3)}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+\frac{3}{x}}{1+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}} \to 0 \cdot \frac{1+0}{1+5\cdot 0+6\cdot 0} = 0 \cdot 1$$

III 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が

$$x_n \to +\infty, \quad y_n \to \alpha \in \mathbf{R} \quad (n \to +\infty)$$

を満たします．このとき

$$x_n + y_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

が成立することを示しましょう．

解答 $y_n \to \alpha (n \to +\infty)$ から

$$\exists N_0 \, (n \geq N_0 \Rightarrow \alpha - 1 < y_n < \alpha + 1)$$

であることが分かります．$x_n \to +\infty (n \to +\infty)$ から，任意の $R > 0$ に対して

$$\exists N_1 \, (n \geq N_1 \Rightarrow R - (\alpha - 1) < x_n)$$

であることが分かります．このとき $n \geq N := \max(N_0, N_1)$ ならば $n \geq N_0$ かつ $n \geq N_1$ なので

$$R = (\alpha - 1) + R - (\alpha + -) < x_n + y_n$$

が成立します．これから

$$x_n + y_n \to +\infty$$

であることが分かります．

IV 函数 $y = \frac{x^2-3x+3}{x-2}$ について考えます．
(1) 導関数 y' を求めましょう．
(2) $y = ax + b + \frac{c}{x-2}$ を満たす定数 a, b, c を求めましょう．
(3) y の増減表を求めてグラフを求めましょう．

解答 (1)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2-3x+3)'(x-2) - (x^2-3x+3)(x-2)'}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(2x-3)(x-2) - (x^2-3x+3)\cdot 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= \frac{x(x-2)-x+3}{x-2} = x + \frac{-x+3}{x-2} \\ &= x + \frac{-(x-2)+1}{x-2} = x - 1 + \frac{1}{x-2} \end{aligned}$$

(3) (1) から y' の符号は

$$y' \gtreqless 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \quad \text{OR} \quad x > 3 \\ x = 1, 3 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$$

となりますから，増減表は

x		1		2		3	
y'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	-1	$\searrow$	/	$\searrow$	3	$\nearrow$

となります．次に無限遠方と不連続点を与える $x = 2$ の近くでの漸近挙動について考えます．

<u>$x \to +\infty$ のとき</u>

$$y = x \cdot \frac{x^2-3x+3}{x(x-2)} = x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}}$$

において $x \to +\infty$ のとき

$$x \to +\infty, \quad \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \to \frac{1-0-0}{1-0} = 1 > 0$$

から

$$y = x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \to +\infty$$

となります．

<u>$x \to -\infty$ のとき</u>

$$y = x \cdot \frac{x^2-3x+3}{x(x-2)} = x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}}$$

において $x \to -\infty$ のとき

$$x \to -\infty, \quad \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \to \frac{1-0-0}{1-0} = 1 > 0$$

から

$$y = x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \to -\infty$$

となります．

<u>$x \to 2+0$ のとき</u>

$$y = x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

において

$$x - 1 \to 1, \quad \frac{1}{x-2} \to +\infty \quad \text{から} \quad y \to +\infty$$

<u>$x \to 2-0$ のとき</u>

$$y = x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

において

$$x - 1 \to 1, \quad \frac{1}{x-2} \to -\infty \quad \text{から} \quad y \to -\infty$$

であることが分かります．さらに

$x > 2$ において

$$y - (x-1) = \frac{1}{x-2} > 0$$

で

$$y - (x-1) \to 0 \quad (x \to +\infty)$$

$x < 2$ において

$$y - (x-1) = \frac{1}{x-2} < 0$$

で

$$y - (x-1) \to 0 \quad (x \to -\infty)$$

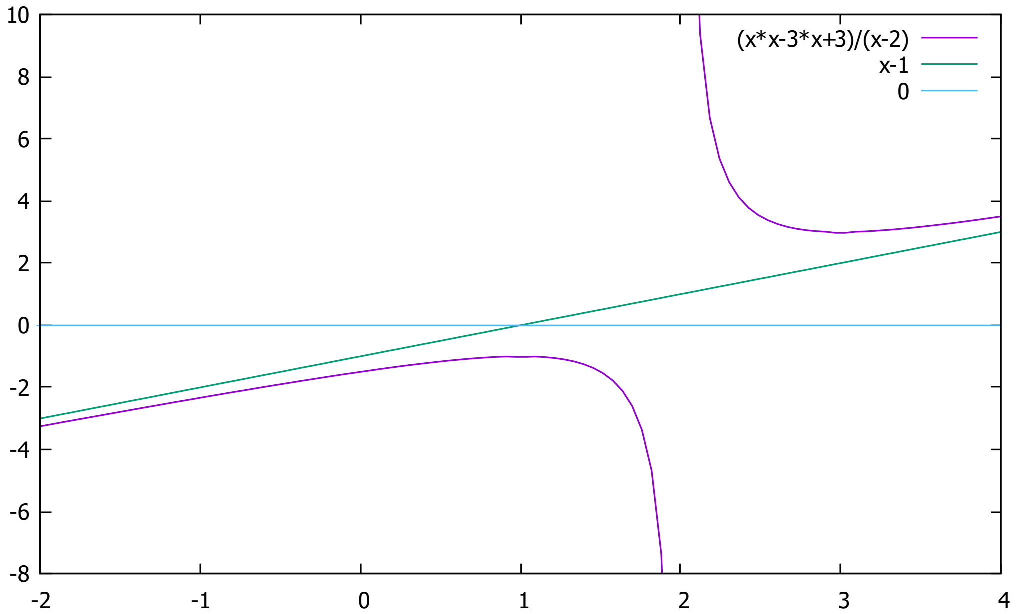
も分かります．最後に

$$x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

が常に成立しますから

$$y \gtrless 0 \Leftrightarrow x \gtrless 2$$

が成立しますからグラフが求まります．



注意

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2} = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$$

から

$$y'' = \frac{2}{(x-2)^3}$$

となりますから

$$y'' \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \gtrless 2$$

が分かります．これから凹凸を含めた増減表は

x		1		2		3	
y'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
$-$	$-$	$-$	$-$	/	$+$	$+$	$+$
y		-1		/		3	

となります．

V 函数 $y=\frac{x^2-2x-1}{x-1}$ について考えます.
(1) 導関数 y' を求めましょう.
(2) $y=ax+b+\frac{c}{x-1}$ を満たす定数 a,b,c を求めましょう.
(3) y の増減表を求めてグラフを求めましょう.

解答 (1)

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(x^2-2x-1)'(x-1)-(x^2-2x-1)(x-1)'}{(x-1)^2}\\
&= \frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x-1)\cdot 1}{(x-1)^2}\\
&= \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2} > 0
\end{aligned}
$$

が分かります.

(2)

$$y=\frac{(x-1)^2-2}{x-1}=x-1-\frac{2}{x-1}$$

(3) (1) から y' の符号は

$$y'>0 \quad (x\neq 1)$$

となりますから，増減表は

x		1	
y'	$+$	/	$+$
y	$\nearrow$	/	$\nearrow$

となります. 次に無限遠方と不連続点を与える $x=1$ の近くでの漸近挙動について考えます.

<u>$x\to\pm\infty$ のとき</u>

$$y=x\cdot\frac{x^2-2x-1}{x(x-1)}=x\cdot\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

において $x\to\pm\infty$ のとき

$$x\to\pm\infty,\quad \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}\to\frac{1-0-0}{1-0}=1>0$$

から

$$y=x\cdot\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}\to\pm\infty \quad \text{（複号同順）}$$

となります.

<u>$x\to 1+0$ のとき</u>

$$y=x-1-\frac{2}{x-1}$$

において

$$x-1\to 0,\ -\frac{2}{x-1}\to-\infty \quad \text{から} \quad y\to-\infty$$

<u>$x\to 1-0$ のとき</u>

$$y=x-1-\frac{2}{x-1}$$

において

$$x-1\to 0,\ -\frac{2}{x-1}\to+\infty \quad \text{から} \quad y\to+\infty$$

となります.

<u>$x>1$ において</u>

$$y-(x-1)=-\frac{1}{x-1}<0$$

で

$$y-(x-1)\to 0 \quad (x\to+\infty)$$

が分かります. 他方

<u>$x<1$ において</u>

$$y-(x-1)=-\frac{1}{x-1}>0$$

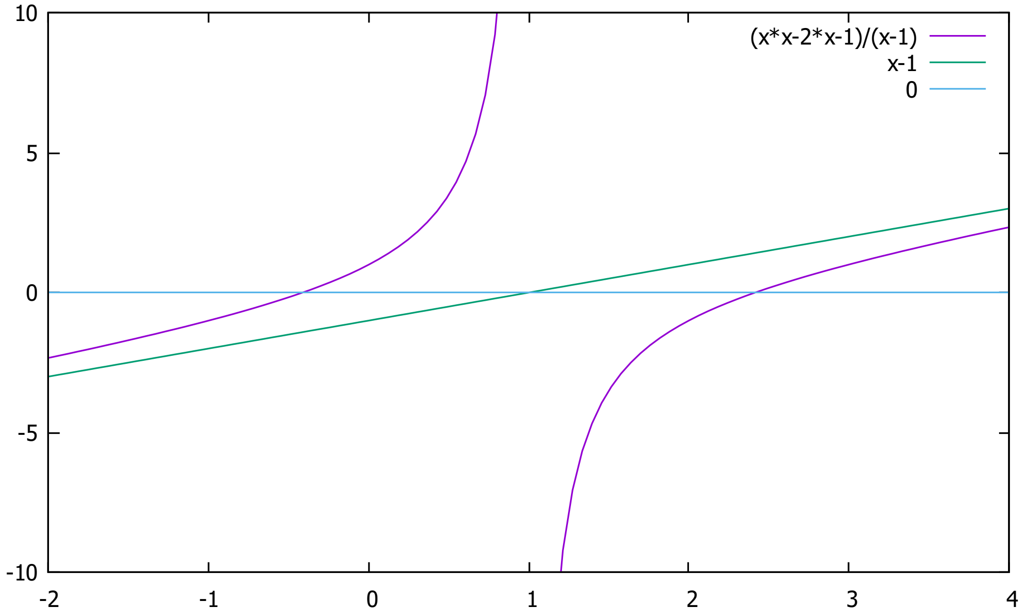
で

$$y-(x-1)\to 0 \quad (x\to-\infty)$$

も分かります. 従って $x\to\pm\infty$ のとき $y=x-1$ に漸近することが分かります. 最後に

$$y \gtreqless 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{2}<x<1 \quad \text{OR} \quad x>1+\sqrt{2}\\ x=1\pm\sqrt{2}\\ x<1-\sqrt{2} \quad \text{OR} \quad 1<x<1+\sqrt{2}\end{cases}$$

に注意して次のグラフを得ます.



注意

$$y' = \frac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$$

から

$$y'' = -\frac{4}{(x-1)^3}$$

となりますから

$$y'' \gtreqless 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \lesseqgtr 1$$

が分かります．これから凹凸を含めた増減表は

x		1	
y'	$+$	/	$+$
y''	$+$	/	$-$
y	⤴	/	↱

となります．

VI 函数 $y = \frac{x^2-x-2}{(x-1)(x-3)}$ について考えます．

(1) 導関数 y' を求めましょう．

(2) $y = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-3}$ を満たす定数 a, b, c を求めましょう．

(3) y の増減表を求めてグラフを求めましょう．

解答 (1)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2-x-2)'(x-1)(x-3) - (x^2-x-2)\{(x-1)(x-3)\}'}{(x-1)^2(x-3)^2} \\ &= \frac{(2x-1)(x-1)(x-3) - (2x-4)(x^2-x-2)}{(x-1)^2(x-3)^2} \\ &= \frac{-(3x^2-10x+11)}{(x-1)^2(x-3)^2} \end{aligned}$$

が分かります．ここで

$$3x^2 - 10x + 11 = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} > 0$$

から

$$y' < 0$$

が常に成立することが分かります.

(2)

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3 + (3x - 5)}{(x-1)(x-3)} = 1 + \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}$$

となります．さらに

$$\frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-3} = \frac{b(x-3) + c(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{(b+c)x - (3b+c)}{(x-1)(x-3)} = \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}$$

が成立するように

$$b + c = 3, \quad 3b + c = 5$$

となるように $b = 1, c = 2$ とすると

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

となります.

(3) (1) から y' の符号は

$$y' < 0 \quad (x \neq 1, 3)$$

となりますから，増減表は

x		1		3	
y'	$-$	/	$-$	/	$-$
y	$\searrow$	/	$\searrow$	/	$\searrow$

となります．次に無限遠方と不連続点を与える $x = 1, 3$ の近くでの漸近挙動について考えます.

$x \to \pm\infty$ のとき

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

において

$$\frac{1}{x-1} \to 0, \quad \frac{2}{x-3} \to 0$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} \to 1 + 0 + 0 = 1$$

となります．ここで $x < 1$ において

$$\frac{1}{x-1} < 0, \quad \frac{2}{x-3} < 0$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} < 1$$

が成立します．他方 $x > 3$ において

$$\frac{1}{x-1} > 0, \quad \frac{2}{x-3} > 0$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} > 1$$

が成立します.

<u>$x \to 1 \pm 0$ のとき</u>

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

において

$$\frac{1}{x-1} \to \pm\infty, \quad \frac{2}{x-3} \to -1$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} \to \pm\infty \quad \text{（複号同順）}$$

となります.

<u>$x \to 3 \pm 0$ のとき</u>

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

において

$$\frac{1}{x-1} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{x-3} \to \pm\infty$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} \to \pm\infty \quad \text{（複号同順）}$$

となります.

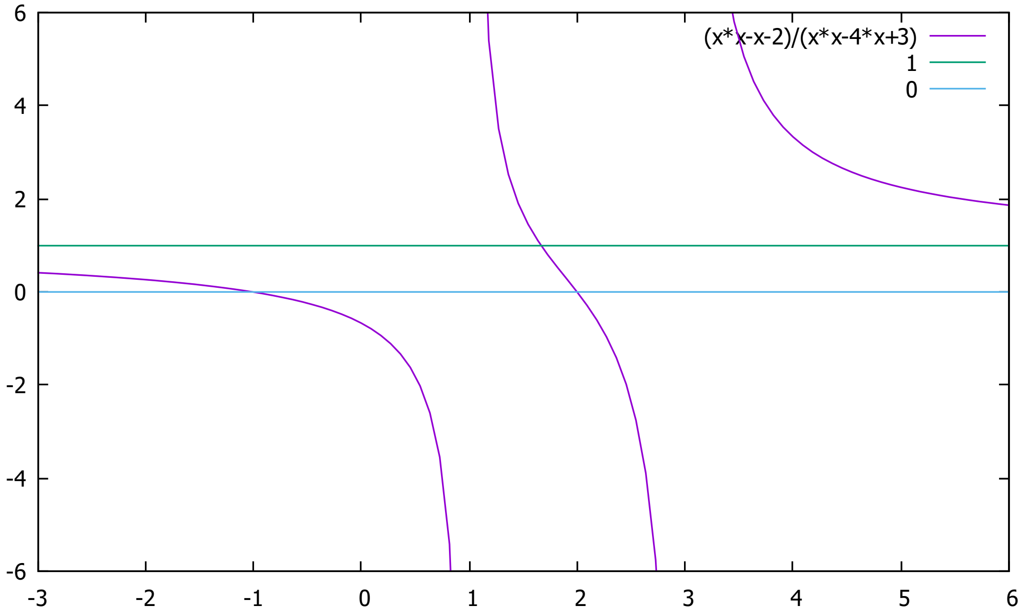
　最後に

$$y = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x-1)}$$

と変形して y の符号について

$$y \gtreqless 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \quad \text{OR} \quad 1 < x < 2 \quad \text{OR} \quad x > 3 \\ x = -1, 2 \\ -1 < x < 1 \quad \text{OR} 2 < x < 3 \end{cases}$$

に注意して次のグラフを得ます.



(x*x-x-2)/(x*x-4*x+3)
1
0
6
4
2
0
-2
-4
-6
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6