順列の符号について　V001,20230616

1　長さ 2 の順列の符号

$\{1,2\}$ の順列の集合を S_2 とします．すなわち

$$S_2 := \{(1\ 2),\ (2\ 1)\}$$

とします．次にこれら長さ 2 の順列に対して符号を

$$\varepsilon(1\ 2) = +1, \quad \varepsilon(2\ 1) = -1$$

と定義します．すると 2 次行列式は

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \sum_{(i\ j) \in S_2} \varepsilon(i\ j) a_i b_j$$

と定義されます.

2　長さ 3 の順列の符号

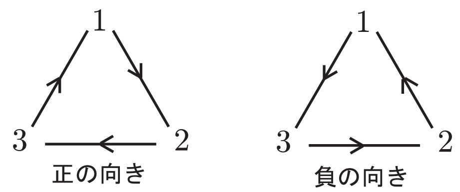
$\{1,2,3\}$ の順列全体の集合を S_3 とします．辞書式に並べると

$$S_3 = \{(1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2),\ (2\ 1\ 3),\ (2\ 3\ 1),\ (3\ 1\ 2),\ (3\ 2\ 1)\}$$

となります．長さが 3 の順列については以下のように定義しました.

偶順列の場合 $(i\ j\ k)$ が偶置換の場合，すなわち

$$i \to j \to k \to i$$



が下図の左側に当てはまる場合

$$\varepsilon(1\ 2\ 3) = \varepsilon(2\ 3\ 1) = \varepsilon(3\ 1\ 2) = 1$$

と定義しました．他方,

奇順列の場合 $(i\ j\ k)$ が奇置換の場合，すなわち

$$i \to j \to k \to i$$

が下図の右側に当てはまる場合

$$\varepsilon(1\ 3\ 2) = \varepsilon(2\ 1\ 3) = \varepsilon(3\ 2\ 1) = -1$$

と定義しました.

長さが 4 の場合に備えるために長さ 3 の順列の符号を帰納的に定義します．

$$\sigma = (i_1\ i_2\ i_3) \in S_3$$

とします．ここで場合を分けて考えます．

<u>$i_3 = 3$ のとき</u>

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(i_1\ i_2)$$

と定義します．他方

<u>$i_3 \neq 3$ のとき</u> $i_1 = 3$ または $i_2 = 3$ となりますが，それぞれの場合

$$\begin{aligned} i_1 = 3\text{のとき} \quad & \varepsilon(3\ i_2\ i_3) = -\varepsilon(i_3\ i_2) \\ i_2 = 3\text{のとき} \quad & \varepsilon(i_1\ 3\ i_3) = -\varepsilon(i_1\ i_3) \end{aligned}$$

と定義します．この定義が前の定義に合致するかが問題ですが，

$$\begin{aligned} &\varepsilon(1\ 2\ 3) = \varepsilon(1\ 2) = +1 && \varepsilon(2\ 1\ 3) = \varepsilon(2\ 1) = -1 \\ &\varepsilon(1\ 3\ 2) = -\varepsilon(1\ 2) = -1 && \varepsilon(2\ 3\ 1) = -\varepsilon(2\ 1) = +1 \\ &\varepsilon(3\ 1\ 2) = -\varepsilon(2\ 1) = +1 && \varepsilon(3\ 2\ 1) = -\varepsilon(1\ 2) = -1 \end{aligned}$$

から 2 つの定義が整合的であることが分かります．

行列の積の行列式に関する公式を示すとき $\sigma = (i_1\ i_2\ i_3)$ に対して

$$|\vec{x}_{i_1}\ \vec{x}_{i_2}\ \vec{x}_{i_3}| = \varepsilon(i_1\ i_2\ i_3) \cdot |\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3| \tag{1}$$

を用いました．これを示してみましょう．まず $(i_1\ i_2)$ に対して

$$|\vec{x}_{i_1}\ \vec{x}_{i_2}\ \vec{x}_3| = \varepsilon(i_1\ i_2) \cdot |\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|$$

が成立することを確認します．具体的には $(i_1\ i_2) = (1\ 2)$ の場合と $(i_1\ i_2) = (2\ 1)$ の場合に関して場合わけをすれば大丈夫です．ここでは $\varepsilon(i_1\ i_2\ i_3)$ の定義と同様に $i_3 = 3$ の場合と $i_3 \neq 0$ の場合に分けて考えます。

<u>$i_3 = 3$ のとき</u>

$$\varepsilon(i_1\ i_2\ 3)|\vec{x}_{i_1}\ \vec{x}_{i_2}\ \vec{x}_3| = \varepsilon(i_1\ i_2)|\vec{x}_{i_1}\ \vec{x}_{i_2}\ \vec{x}_3| = |\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|$$

となりますが，$\varepsilon(i_1\ i_2\ 3)^2 = 1$ から (**??**) が従います．

<u>$i_3 \neq 3$ のとき</u>$i_1 = 3$ または $i_2 = 3$ のどちらか一方が成立します．$i_1 = 3$ のとき

$$\varepsilon(3\ i_2\ i_3)|\vec{x}_3\ \vec{x}_{i_2}\ \vec{x}_{i_3}| = -\varepsilon(i_3\ i_2) \cdot (-1)|\vec{x}_{i_3}\ \vec{x}_{i_2}\ \vec{x}_3| = |\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|$$

となりますが，$\varepsilon(3\ i_2\ i_3)^2 = 1$ から (**??**) が従います．他方 $i_2 = 3$ のとき

$$\varepsilon(i_1\ 3\ i_3)|\vec{x}_{i_1}\ \vec{x}_3\ \vec{x}_{i_3}| = -\varepsilon(i_1\ i_3) \cdot (-1)|\vec{x}_{i_1}\ \vec{x}_{i_3}\ \vec{x}_3| = |\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|$$

となりますが，$\varepsilon(i_1\ 3\ i_3)^2 = 1$ から (**??**) が従います．