何故対角化? (その2)

Presentation にある $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$ の対角化を用いる.

$P=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5&0\\0&-1\end{pmatrix}$ であることを用いる.

微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$$

i.e. $\begin{cases}x'(t)=x(t)+2y(t)\\y'(t)=4x(t)+3y(t)\end{cases}$

について考えます.

$$\begin{pmatrix}\xi(t)\\\eta(t)\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$$

とすると $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi(t)\\\eta(t)\end{pmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\\text{問参照}}}{=}P^{-1}\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=P^{-1}A\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$

$$=P^{-1}AP\cdot P^{-1}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi(t)\\\eta(t)\end{pmatrix}$$

従って $\begin{cases}\xi'(t)=5\xi(t)\\\eta'(t)=-\eta(t)\end{cases}$ となる. このとき

$$\begin{cases}\xi(t)=\xi(0)e^{5t}\\\eta(t)=\eta(0)e^{-t}\end{cases}$$

であることが分かる. (ここは注にて説明)

$$P^{-1}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi(t)\\\eta(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{5t}&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi(0)\\\eta(0)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{5t}&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}e^{5t}&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}$$

が従います.

注) $$P\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}P^{-1} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} t^{l} A^{l} = e^{tA}$$

が成立します. 収束を無視して考えてみました.

注) $\mathbb{R}$上の微分可能な$\mathbb{R}$値関数 $f(t)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$f'(t) = \alpha f(t)$$

を満たすならば

$$f(t) = f(0)e^{\alpha t}$$

が成立します. 実際 Leibnitz の公式から.

$$\begin{aligned}(f(t)e^{-\alpha t}) &= f'(t)e^{-\alpha t} + f(t)(-\alpha)e^{-\alpha t} \\ &= \alpha \cdot f(t)e^{-\alpha t} + (-\alpha)f(t)e^{-\alpha t} \\ &\equiv 0\end{aligned}$$

から従います.