2023 年 5 月 19 日ハンドアウト —2 次元部分空間について—

MSF2023L03 0519 V003=MSF2021L05 0507 V003

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とします．また $\mathbf{R}^3$ 中に

$$L := L(\vec{a}, \vec{b}) = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

を定めます.

(1) $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を示しましょう． **(2)** $\vec{p}, \vec{q} \in L$ を示しましょう．さらに $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ を示しましょう.

解答 **(1)** $\vec{a}, \vec{b}$ の第 1 成分と第 2 成分を用いて

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

となりますから $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ であることが分かります.

(2) 行基本変形

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(i)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -4 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\overset{(ii)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \overset{(iii)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

を用います（ここで行基本変形

$$(i) 2r+ = 1r \times (-2),\ 3r+ = 1r$$
$$(ii) 2r\times = \left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$(iii) 1r+ = 2r \times (-3),\ 3r+ = 2r \times (-4)$$

を用いました[*1]）．この行基本変形で第 4 列，第 3 列をマスクして考えると

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{p} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y &= 1 \\ 2x + 2y &= 0 \\ -x + y &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & & = -\frac{1}{2} \\ & y & = \frac{1}{2} \\ 0x & + 0y & = 0 \end{cases}$$

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{q} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y &= 9 \\ 2x + 2y &= 10 \\ -x + y &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & & = 3 \\ & y & = 2 \\ 0x & + 0y & = 0 \end{cases}$$

であることが分かります．従って

$$\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

[*1] $a+ = b$ は a に b の中身を加えること，$a\times = b$ は a に b の中身を加えることです．プログラミングを学ぶと自然に思えるようになります.

が成立します．これから $\vec{p},\vec{q}\in L(\vec{a},\vec{b})$ であることが従います．さらに $\vec{p},\vec{q}$ の第 1 成分と第 2 成分を用いて

$$\left|\begin{smallmatrix}1 & 9\\ 0 & 10\end{smallmatrix}\right| = 10 \neq 0$$

から $\vec{p}\nparallel\vec{q}$ が従います．または補足 1 にありますが，L04 で学んだ一般論を用いると

$$\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & 3\\ \frac{1}{2} & 2\end{vmatrix} = -\frac{5}{2} \neq 0$$

から $\vec{p}\nparallel\vec{q}$ が従います．

補足 0 行基本変形で列ベクトルの間の線型関係が保たれることに注意します（S2 タームで学びます）．上の行基本における最後の行列 B を $B=(\vec{a}_2\ \vec{b}_2\ \vec{p}_2\ \vec{q}_2)$ と列ベクトル表示すると

$$\vec{p}_2 = -\frac{1}{2}\vec{a}_2+\frac{1}{2}\vec{b}_2,\quad \vec{q}_2 = 3\vec{a}_2+2\vec{b}_2$$

が成立しますから

$$\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\quad \vec{q} = 3\vec{a}+2\vec{b}$$

が成立します．

補足 1 一般に $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{K}^n$ が $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ を満たすとします．このとき

$$\vec{p},\vec{q}\in L = L(\vec{a},\vec{b})$$

に対して

$$\vec{p} = x_1\vec{a}+y_1\vec{b},\ \vec{q} = x_2\vec{a}+y_2\vec{b}$$

と表すと

$$\boxed{\vec{p}\nparallel\vec{q} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\neq 0}$$

となります．このことを示すために

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}$$

と表現します．$\left|\begin{smallmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{smallmatrix}\right|\neq 0$ が成立するとき

$$(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \vec{0}$$

とすると，

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \vec{0}$$

が従います．$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ が成立していますから

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \vec{0}$$

となります．いま $\left|\begin{smallmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{smallmatrix}\right|\neq 0$ ですから $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \vec{0}$ であることが分かります．これは $\vec{p}\nparallel\vec{q}$ であることを意味します．次に $\left|\begin{smallmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{smallmatrix}\right| = 0$ であるとします．このときある $\left(\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right)\neq\vec{0}$ に対して

$$\left(\begin{smallmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

となります．これから

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

から $\vec{p} \parallel \vec{q}$ が従います．

問題の状況で

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} \vec{a}\ \vec{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} \neq 0$$

から $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ であることが分かります．

補足 2 一般に $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\vec{p}, \vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \lambda\vec{p} + \mu\vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b})$$

が成立します．実際

$$\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b},\ \vec{q} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$

と表すと

$$\begin{aligned} \lambda\vec{p} + \mu\vec{q} &= (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_2)\vec{a} + (\lambda y_1 + \mu y_2)\vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

と示せます．これを用いると

$$L(\vec{p}, \vec{q}) = \{\xi\vec{p} + \eta\vec{q};\ \xi, \eta \in \mathbf{R}\} \subset L(\vec{a}, \vec{b})$$

であることが分かります．ここで

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

を仮定します．このとき

$$(\vec{a}\ \vec{b}) = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

が成立しますから $\vec{a}, \vec{b} \in L(\vec{p}, \vec{q})$ が分かります．$L(\vec{p}, \vec{q})$ も足し算とスカラー倍について閉じていますから

$$L(\vec{a}, \vec{b}) \subset L(\vec{p}, \vec{q})$$

であることが分かります．以上で

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow L(\vec{p}, \vec{q}) = L(\vec{a}, \vec{b})$$

が示されました．

補足 3 補足 2 で以下を示したことになります．

定理 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を満たすとします．$\vec{p}, \vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ に対して

$$\vec{p} \nparallel \vec{q} \Rightarrow L(\vec{p}, \vec{q}) = L(\vec{a}, \vec{b})$$

これを以下のようにも示せます．

$$L(\vec{p},\vec{q}) \subsetneq L(\vec{a},\vec{b})$$

とするとある $\vec{r}\in L(\vec{a},\vec{b})$ が

$$\vec{r}\notin L(\vec{p},\vec{q})$$

を満たします．このとき $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ は線型独立になります．実際

$$c_1\vec{p}+c_2\vec{q}+c_3\vec{r}=\vec{0}$$

を仮定します．$c_3\neq 0$ とすると

$$\vec{r}=-\frac{c_1}{c_3}\vec{p}-\frac{c_2}{c_3}\vec{q}\in L(\vec{p},\vec{q})$$

となりますが，これはあり得ません．よって $c_3=0$ となり，さらに $c_1\vec{p}+c_2\vec{q}=\vec{0}$ から $c_1=c_2=0$ が従います．

他方，$L(\vec{a},\vec{b})$ に 3 本の線型独立なベクトルは存在しえません（講義で証明済み）．よって $L(\vec{p},\vec{q})\subsetneq L(\vec{a},\vec{b})$ はあり得ませんから $L(\vec{p},\vec{q})=L(\vec{a},\vec{b})$ であることが分かります．

（ここから冒頭にある問題の状況） 補足 3 にある定理を用いると

$$L(\vec{a},\vec{b})=L(\vec{p},\vec{q})$$

であることが分かります．また $\vec{a}\nparallel\vec{b}$, $\vec{p}\nparallel\vec{q}$ から

$$x\vec{a}+y\vec{b}=x'\vec{a}+y'\vec{b}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\xi\vec{p}+\eta\vec{q}=\xi'\vec{p}+\eta'\vec{q}\Rightarrow\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi'\\\eta'\end{pmatrix}$$

が従います．上で示しましたが

$$(\vec{p}\ \vec{q})=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 3\\ \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}$$

が成立します．これから

$$\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 3\\ \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 3\\ \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

が従います．

付録

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{K}^2$ に対して

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$$

を満たす $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ である $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbf{K}^3$ が存在します．

証明 (i) $|\vec{a}\ \vec{b}|=0$ ならば

$$x_0\vec{a}+y_0\vec{b}=\vec{0}$$

を満たす $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0}$ が存在します．これを

$$x_0\vec{a} + y_0\vec{b} + 0\vec{c} = \vec{0}$$

と見做します.

(ii) $|\vec{a}\ \vec{b}| \neq 0$ ならば $(\vec{a}\ \vec{b})$ は正則ですから

$$(\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) = -\vec{c}$$

を満たす $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{K}^2$ が存在します．上の等式は

$$x_0\vec{a} + y_0\vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

となります.