I　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$ に対して

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線形独立であること、すなわち

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0} \Longrightarrow x=y=z=0$$

であるか考えましょう。$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して掃き出し法を用い pivot が1で pivot の上が0の形まで変形しましょう。用いた変形を講義で説明した形で明示すること。

II (1) $A=\begin{pmatrix}2&1\\-3&2\end{pmatrix}$ が正則であるか判定して、正則ならば逆行列を求めましょう。

(2) $AX=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$ である2次正方行列 X を求めましょう

(3) $YA=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$ である2次正方行列 Y を求めましょう。

(2), (3)の解答で(1)を考慮していないものはマイナス点をつけます。

III 回転行列 R_θ に対して

$$(R_\theta\vec{v}, R_\theta\vec{w})=(\vec{v}, \vec{w})$$

が成立することを示しましょう。

IV $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\2\\10\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}5\\7\\7\\5\end{pmatrix}$ とする。

(1) $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ を示しましょう。

(2) $\vec{c}, \vec{d}\in L(\vec{a}, \vec{b})$ を示して $\vec{c}, \vec{d}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表しましょう

(3) (2)を用いて $\vec{c}\nparallel\vec{d}$ を示しましょう。

((2)では掃き出し法を用いること。Iと同様の形、pivotが1でpivotの上が0の形まで変形すること。用いた変形を講義で用いた形で明示すること。)

I $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\3&-2&2\\1&2&1\end{pmatrix} \xrightarrow[4r+=1r\times(-4)]{2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r\times(-3)} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-7\\0&-8&-7\\0&0&-2\end{pmatrix}$

56

$\xrightarrow{2r\times=(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&\frac{7}{3}\\0&-8&-7\\0&0&-2\end{pmatrix} \xrightarrow[3r+=2r\times 8]{1r+=2r\times(-2)} \begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{3}\\0&1&\frac{7}{3}\\0&0&\frac{35}{3}\\0&0&-2\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{3r+=\frac{3}{35}} \begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{3}\\0&1&\frac{7}{3}\\0&0&1\\0&0&-2\end{pmatrix} \xrightarrow[4r+=3r\times 2]{1r+=3r\times\frac{5}{3},\ 2r+=3r\times(-\frac{7}{3})} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0} \iff x=y=z=0$ となるので

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は LI.

II (1) $|A| = \begin{vmatrix}2&1\\-3&2\end{vmatrix} = 7 \neq 0$ なので A は正則で $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}$

(2) $AX = \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$ に左から A^{-1} をかけると

$$A^{-1}AX = A^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$$

と同じ値である (左) $= I_2 X = X$, (右) $= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$

から $X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&3\\1&4\end{pmatrix}$ $\qquad = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&3\\1&8\end{pmatrix}$

(3) $YA = \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$ に右から A^{-1} をかけると

$$YAA^{-1} = \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}A^{-1}$$

と同じ値で (左) $= Y I_2 = Y$, (右) $= \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}$
$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}8&3\\1&3\end{pmatrix}$

注 $\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}A^{-1} \neq A^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$ となっていることに注意しよう.

IV (1)

(2) $(\vec{a}\ \vec{b} \mid \vec{c}\ \vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3r+=1r\times(-3) \\ 4r+=1r\times(-1)}]{2r+=1r\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{2r\times=\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3r+= \\ 2r\times 8}]{\substack{1r+= \\ 2r\times(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

から $\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b}$ となる

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の第1,2成分について行列式を考えると $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$
となるので $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

(3) $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ で $\vec{\alpha} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $\vec{\beta} = z\vec{a} + w\vec{b}$ と定めると

$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \iff \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} \neq 0$

である。この場合

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$

から $\vec{c} \nparallel \vec{d}$

小テストの補足

I

L04_0428 の問題II で

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -17 \\ 3 & -1 & 15 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

を示したが、これから

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

が成立する。従って $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ が分かる。

一般には次の定理が成立する。

定理 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \iff (\vec{a}\ \vec{b}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ と行基本変形できる。

($\Longleftarrow$) は明らかなので ($\Longrightarrow$) を示す。

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ なので $\vec{a} \neq \vec{0}$ である。上から $\neq 0$ である成分を探す

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i \\ * \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad a_i \neq 0$$

である i が存在する。

$$(\vec{a}\ \vec{b}) \xrightarrow{1r \leftrightarrow ir} \begin{pmatrix} a_i & \#_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \#_{i-1} \\ \hline 0 & \#_i \\ * & \vdots \\ \vdots & \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \times \frac{1}{a_i}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\#_1}{a_i} \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \\ 0 & \#_{i-1} \\ 0 & \#_i \\ * & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{i-1} & y_{i-1} \\ x_i & y_i \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\vdots]{2r += 1r \times (-x_2)} \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & z_n \end{pmatrix} = (*)$$

ここで $z_2 = \cdots = z_n = 0$ とすると $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow x=-y_1 y$

特に $y=1$ として $x=-y_1$ すなわち $-y_1\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ となる. $\vec{a}\parallel\vec{b}$

となり矛盾 従って $\exists j\ 2\le j\le n,\ z_j \neq 0$

$$
(*) = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & z_j \\ \vdots & \vdots \\ 0 & z_n \end{pmatrix}
\xrightarrow{2r \leftrightarrow jr}
\begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & z_j \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \end{pmatrix}
\xrightarrow{2r \times \frac{1}{z_j}}
\begin{pmatrix} 1 & w_1 \\ 0 & 1 \\ 0 & w_3 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & w_n \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{1r + 2r \times (-w_1) \\ 3r + 2r \times (-w_3) \\ \vdots}]{}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

(証明終)

さらに $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ に対して以下が分かる.

<u>定理</u> $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は線形独立 (LI) すなわち

($x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow x=y=z=0$)

$\Longleftrightarrow$ $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \end{pmatrix}$ と行基本変形できる.

($\Leftarrow$) は明らか. ($\Rightarrow$) を示す

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が LI ならば $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ である. 従って

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & r_2 \\ 0 & 0 & r_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} = ⊛$$

と行基本変形できる. $r_3 = \cdots = r_n = 0$ とすると

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \iff x = -r_1 z,\ y = -r_2 z$$

特に $z=1$ とすると $x = -r_1$, $y = -r_2$, $z = 1$ が解で.

$$-r_1\vec{a} - r_2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

これは $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はLIでない（LDである）ことを示している. 従って

$\exists j\ \ 3 \leqq j \leqq n \quad r_j \neq 0$ であることが分かります.

$$⊛ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & r_2 \\ 0 & 0 & r_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{3r \leftrightarrow jr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1' \\ 0 & 1 & r_2' \\ 0 & 0 & r_3' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & & r_n' \end{pmatrix} = (**)$$

$r_3' = r_3 \neq 0$ なので 3行を $\frac{1}{r_3'}$ 倍します

$$(**) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1' \\ 0 & 1 & r_2' \\ 0 & 0 & 1 \\ & & r_{34}' \\ & & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{1r += 3r \times (-r_1') \\ 2r += 3r \times (-r_2') \\ 4r += 3r \times (-r_4') \\ \vdots}]{} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

L05 問題IV の補足として

2次元部分空間(続)

一般論について

1° $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して
$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b}) \Longrightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b})$$

実際 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b})$ なので
$$\vec{v}_1 = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}_2 = x_2 \vec{a} + y_2 \vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
と書ける
$$\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2)\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \left((\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$
$$= \left((\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$
$$= (\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right)$$
となる $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ とすると
$$\lambda v_1 + \lambda v_2 = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi \vec{a} + \eta \vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b})$$

2° $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ とすると
$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ から
$$x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$$
従って
$$(x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{0}$$
$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ なので $x - x' = y - y' = 0$ すなわち $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

N.B. $\varphi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} L(\vec{a}, \vec{b})$ は全単射となる.

3° $\vec a \nparallel \vec b$ とする $\vec\alpha = x_1\vec a + y_1\vec b$, $\vec\beta = x_2 + y_2\vec b$
とすると
$$\vec\alpha \nparallel \vec\beta \iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \ne 0$$

$$c_1\vec\alpha + c_2\vec\beta = \vec 0 \iff (\vec\alpha\ \vec\beta)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec 0$$
$$\iff (\vec a\ \vec b)\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\vec a \nparallel \vec b}{\iff} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec 0$$

なので
$$\vec a \nparallel \vec b \iff \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec 0\right)$$
$$\iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \ne \vec 0$$

例1 (LOS IV) $(\vec a\ \vec b\ \vec c\ \vec d) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

から $(\vec c\ \vec d) = (\vec a\ \vec b)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec a, \vec b$ の第1, 第2成分を考えると $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \ne 0$ から
$$\vec a \nparallel \vec b$$
従って 3° より $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \ne 0$ から $\vec p \nparallel \vec q$ が従う.

N.B. $\vec a, \vec b \in R^4$ のとき, 「$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \ne 0$ である i, j が存在する」 $\iff \vec a \nparallel \vec b$

4° $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ として $\vec{\alpha} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$, $\vec{\beta} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$ とする.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow L(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = L(\vec{a}, \vec{b})$$

$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ なので $\xi\vec{\alpha} + \eta\vec{\beta} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ （1°による）.

従って

$$L(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \subset L(\vec{a}, \vec{b})$$

$\forall \vec{v} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ をとると $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる.

(*) $$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

が成立するが $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ から $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ は正則である.

(*)の両辺に $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$ をかけると

$$\left((\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

左 $= (\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}\right) = (\vec{a}\ \vec{b})I_2 = (\vec{a}\ \vec{b})$

から

$$(\vec{a}\ \vec{b}) = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

これから $\vec{v} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in L(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

ここで $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とした

例12 問11の状況で $(\vec{c}\ \vec{d}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$

なので

$$L(\vec{c}\ \vec{d}) = L(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})$$

$\vec{v} \in L(\vec{a}\ \vec{b})$ とすると $\vec{v} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{c}\ \vec{d})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

これから

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ となる逆. $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$