

第2章 複素数と代数学の基本定理

以下では \mathbf{K} で \mathbf{R} または \mathbf{C} を表します. また $\mathbf{K}[x]$ は \mathbf{K} を係数とする多項式全体の集合を表します.

2.3 多項式

2.3.3 多項式の次数

1. $P(x) \in \mathbf{K}[x]$ が $P(x) \neq 0$ であるとします.

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbf{K} (j = 0, \cdots, n), a_n \neq 0 \quad (2.1)$$

とします. このとき P の次数として

$$\deg(P) = n$$

と定めます.

2. $P(x) \in \mathbf{K}[x]$ が $P(x) = 0$ であるとします. このとき

$$\deg(P) = -\infty$$

と定めます.

3. $P, Q \in \mathbf{K}[x]$ のとき

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

が成立します. これは P が (2.1)

$$Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_k \in \mathbf{K} (k = 0, \cdots, m), b_m \neq 0 \quad (2.2)$$

で与えられているとき

$$(P \cdot Q)(x) = a_n b_m x^{m+n} + \cdots + c_\ell x^\ell + \cdots + c_1 x + c_0$$

$$c_\ell = \sum_{i+j=\ell} a_i b_j$$

となることから示せます.

4. (剰余定理)

定理 2.1. $P, D \in \mathbf{K}[x]$ で $\deg(D) \geq 1$ とします. このとき

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

$$\deg(R(x)) < \deg(D(x))$$

を満たす $Q(x), R(x) \in \mathbf{K}[x]$ がただ一つ存在します.

Proof. **(存在)** (i) $\deg(P) < \deg(D)$ の場合

$$P(x) = 0 \cdot D(x) + P(x), \quad \deg(P(x)) < \deg(D(x))$$

となりますから, $Q(x) = 0, R(x) = P(x)$ として成立します.

(ii) $n = \deg(P) \geq \deg(D) = m$ の場合を考えます. 帰納法を用いるとして, $\deg(P) \leq n-1$ の場合は定理 (存在について) が示されているとします.

$$D(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_k \in \mathbf{K} (k = 0, \dots, m), b_m \neq 0$$

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbf{K} (j = 0, \dots, n), a_n \neq 0$$

とします. ここで

$$S(x) := P(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} D(x)$$

とすると

$$\deg(S(x)) \leq n-1$$

となります. 帰納法の仮定を用いると

$$S(x) = Q_1(x)D(x) + R(x), \quad \deg(R(x)) < \deg(D(x))$$

を満たす $Q_1, R \in \mathbf{K}[x]$ が存在します. このとき

$$P(x) = (a_n b_m x^{n-m} + Q_1(x))D(x) + R(x)$$

より

$$Q(x) = a_n b_m x^{n-m} + Q_1(x)$$

として定理 (存在について) が成立することが分かります.

(一意性)

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x) = Q_0(x)D(x) + R_0(x)$$

$$\deg(R(x)) < \deg(D(x)), \quad \deg(R_0(x)) < \deg(D_0(x))$$

が成立するとします. このとき

$$(Q(x) - Q_0(x))D(x) = R_0(x) - R(x)$$

が成立しますが, $R \neq R_0$ とすると $Q(x) - Q_0(x) \neq 0$ が従います¹. このことから

$$\deg(D) > \deg(R_0 - R_1) = \deg(Q - Q_0) + \deg(D) \geq \deg(D)$$

から矛盾が生じます. よって $R = R_0$ が導かれます. さらに $D \neq 0$ から $Q = Q_0$ も従います. \square

定理 2.1 (剰余定理) を用いると次の定理 2.2 (因数定理) を証明できます.

定理 2.2. (因数定理) $P(x) \in \mathbf{K}[x]$, $\alpha \in \mathbf{K}$ のとき

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow x - \alpha \text{ は } P(x) \text{ を割切ります}$$

Proof. (\Rightarrow) $P(x)$ を $x - \alpha$ で割ります. すなわち

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + \beta$$

を満たす $Q(x) \in \mathbf{K}[x]$, $\beta \in \mathbf{K}$ が存在します. この両辺に $x = \alpha$ を代入すると

$$0 = P(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) + \beta = \beta$$

から $\beta = 0$ が分かりますから, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ が導けます.

(\Leftarrow) これは明らかでしょう. \square

定理 2.2 (因数定理) の応用として次の定理 2.3 を証明します.

定理 2.3. $P(x) \in \mathbf{K}[x]$ が n 次以下とします. そして $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbf{K}$ が条件

$$\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j), \ P(\alpha_i) = 0 \ (1 \leq i \leq n+1)$$

を満たすとします. このとき

$$P(x) = 0$$

が成立します.

Proof. 因数定理によって $P(\alpha_1) = 0$ から

$$P(x) = (x - \alpha_1)P_1(x)$$

を満たす $P_1(x) \in \mathbf{K}[x]$ が存在します. さらに $P(\alpha_2) = 0$ と $\alpha_1 \neq \alpha_2$ が成立しますから

$$0 = P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)P_1(\alpha_2)$$

¹ $P_1, P_2 \in \mathbf{K}[x]$ において $P_1 P_2 = 0$ ならば $P_1 = 0$ または $P_2 = 0$ となることを用いています.

から $P_1(\alpha_2) = 0$ が従います. よって因数定理を用いると

$$P_1(x) = (x - \alpha_2)P_2(x), \text{ 従って } P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)P_2(x)$$

を満たす $P_2(x) \in \mathbf{K}[x]$ が存在することが分かります. このプロセスを繰り返します. すなわち, いま $i \leq n - 1$ を満たす i に対して

$$P(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_i)P_i(x)$$

を満たす $P_i(x) \in \mathbf{K}[x]$ が存在するとします. $x = \alpha_{i+1}$ を代入すると

$$0 = P(\alpha_{i+1}) = (\alpha_{i+1} - \alpha_1) \cdots (\alpha_{i+1} - \alpha_i)P_i(\alpha_{i+1})$$

が従います. さらに $\alpha_{i+1} \neq \alpha_k$ ($k = 1, \dots, i$) から

$$P_i(\alpha_{i+1}) = 0$$

を得ます. よって因数定理から

$$P_i(x) = (x - \alpha_{i+1})P_{i+1}(x) \text{ 従って } P(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{i+1})P_{i+1}(x)$$

を満たす $P_{i+1}(x) \in \mathbf{K}[x]$ が存在することが分かります. 特に $i = n - 1$ のとき

$$P(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)P_n(x)$$

となります. この両辺の次数を考えると

$$n \geq \deg(P) = n + \deg(P_n)$$

から

$$\deg(P_n) \leq 0$$

が分かります. すなわち $P_n(x) = \alpha \in \mathbf{K}$ であることが導かれました.

$$P(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)\alpha$$

に $x = \alpha_{n+1}$ を代入すると

$$0 = P(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1} - \alpha_1) \cdots (\alpha_{n+1} - \alpha_n)\alpha$$

から $\alpha = 0$ であることが結論できます. 以上で $P(x) = 0$ であることが証明できました.

□

2.4 公約式・最大公約式

多項式 $f(t), g(t) \in \mathbf{K}[t]$ が与えられているとします. f が g で割り切れるとは, f を g で割った剰余が 0 ということです. すなわち

$$f(t) = g(t)h(t)$$

を満たす $h(t) \in \mathbf{K}[t]$ が存在することです. このとき g を f の因子 (divisor) と呼び

$$g(t)|f(t)$$

と記します.

多項式 $f_1(t), \dots, f_\ell(t) \in \mathbf{K}[t]$ すべての因子である $g(t) \in \mathbf{K}[t]$ を公約式と呼びます:

$$g(t)|f_1(t), \dots, g(t)|f_\ell(t)$$

このとき次数について

$$\deg(g(t)) \leq \deg(f_i(t)) \quad (i = 1, \dots, \ell)$$

が成立するので, 最大次数の公約式 $d(t)$ が存在することが分かり. **最大公約式**と呼びます. 証明を考えるときに, $1 \in \mathbf{K}[t]$ が公約式になることにも注意しよう. ここで最高次の係数が 1 とすると²最大公約式はただ一つ存在することが示されます. そのための道はいろいろありますが, ここでは**(拡張) ユークリッドの互除法**を用いることにします³.

2.5 (拡張) ユークリッドの互除法

定理 2.1 (剰余定理) の応用として, 2つの多項式 $f(x), g(x) \in \mathbf{K}[x]$ の最大次数の共通因子を求める **(拡張) ユークリッドの互除法**を解説します. まず拡張版でない互除法についてです.

まず $f_0 := f, f_1 := g$ として, 以下のように割り算を繰り返します.

$$\begin{array}{lll} f_0(x) = f(x) \text{ を } f_1(x) = g(x) \text{ で割るとき} & \text{商: } q_1(x) & \text{剰余: } f_2(x) \\ f_1(x) = g(x) \text{ を } f_2(x) \text{ で割るとき} & \text{商: } q_2(x) & \text{剰余: } f_3(x) \\ f_2(x) \text{ を } f_3(x) \text{ で割るとき} & \text{商: } q_3(x) & \text{剰余: } f_4(x) \\ f_3(x) \text{ を } f_4(x) \text{ で割るとき} & \text{商: } q_4(x) & \text{剰余: } f_5(x) \\ & \vdots & \\ f_{k-2}(x) \text{ を } f_{k-1}(x) \text{ で割るとき} & \text{商: } q_{k-1}(x) & \text{剰余: } f_k(x) \\ & \vdots & \end{array}$$

²最高次数の係数が 1 である多項式 $t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_1t + a_0$ のことをモニック (monic) な多項式と呼びます.

³線型代数学の教科書にはイデアル (Ideal) を用いる流れを示してあります.

とします. このとき

$$f_0(x) = q_1(x)f_1(x) + f_2(x) \quad (0)$$

$$f_1(x) = q_2(x)f_2(x) + f_3(x) \quad (1)$$

$$f_2(x) = q_3(x)f_3(x) + f_4(x) \quad (2)$$

⋮

$$f_{j-2}(x) = f_{j-1}(x)q_{j-1}(x) + f_j(x) \quad (j)$$

⋮

となります. 剰余の次数に着目すると

$$\deg(f_1) > \deg(f_2) > \deg(f_3) > \cdots$$

と1以上小さくなっていきますから, ある時点で

$$\deg(f_{k+1}) = -\infty$$

従って

$$f_{k-1}(t) = q_k(t)f_k(t)$$

となります. 以上のプロセスで

$$f_{j-2}(x) = q_{j-1}(x)f_{j-1}(x) + f_j(x)$$

において f_{j-2} と f_{j-1} の共通因子であることと f_{j-1} と f_j の共通因子であることは必要十分です. 従って f_0 と f_1 の共通因子と f_{k-1} と f_k の共通因子は一致します. f_k が f_{k-1} と f_k の最大公約式なので, f_0 と f_1 の最大公約式であることが従います.

次に上で求めた $f(t)$ と $g(t)$ の最大公約式 $d(t) = f_k(t)$ に対して

$$a(t)f(t) + b(t)g(t) = d(t)$$

を満たす $a(t), b(t) \in \mathbf{K}[t]$ を求めることを考えましょう. ここでは上で求めた f_0, f_1, \dots, f_k に対して順次

$$a(t)_i f(t) + b_i(t)g(t) = f_i(t)$$

を満たす $a_i(t), b_i(t)$ を定めていく形で $a(t) = a_k(t), b(t) = b_k(t)$ を求めていきます.

最初に

$$a_0 = 1, b_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = 1$$

と定めます. すると $f = f_0, g = g_1$ と (0), (1) に注意すると

$$a_0 f + b_0 g = f_0, \quad a_1 f + b_1 g = f_1$$

が成立します. 帰納的に

$$a(t)_i f(t) + b_i(t)g(t) = f_i(t)$$

が $i = 0, 1, \dots, j$ に対しているとして

$$a_{j+1} := a_{j-1} - q_j a_j, \quad b_{j+1} := b_{j-1} - q_j b_j$$

と定めると (j-1) によって

$$\begin{aligned} f_{j+1} &= f_{j-1} - q_j f_j \\ &= (a_{j-1}f + b_{j-1}g) - q_j(a_j f + b_j g) \\ &= (a_{j-1} - q_j a_j)f + (b_{j-1} - q_j b_j)g \\ &= a_{j+1}f + b_{j+1}g \end{aligned}$$

となります. これを繰り返していくと

$$a_k f + b_k g = f_k$$

となります. $a(t) = a_k(t)$, $b(t) = b_k(t)$ と定めると

$$a(t)f(t) + b(t)g(t) = d(t) \tag{2.3}$$

が成立することが分かります.

定理 2.4.

$$(f, g) := \{h_1(t)f(t) + h_2(t)g(t) \in \mathbf{K}[t]; h_1(t), h_2(t) \in \mathbf{K}[t]\}$$

$$(d) := \{d(t)h(t) \in \mathbf{K}[t]; h(t) \in \mathbf{K}[t]\}$$

と定めると

$$(f, g) = (d)$$

が成立します.

Proof. 任意の $p \in (f, g)$ を取ります. すると

$$p(t) = h_1(t)f(t) + h_2(t)g(t), \quad h_1(t), h_2(t) \in \mathbf{K}[t]$$

と表されます. $d(t)$ は $f(t)$ と $g(t)$ の公約数ですから

$$f(t) = p_1(t)d(t), \quad g(t) = p_2(t)d(t)$$

がある $p_1(t), p_2(t) \in \mathbf{K}[t]$ に対して成立します. このとき

$$p(t) = h_1(t)p_1(t)d(t) + h_2(t)p_2(t)d(t) = (h_1(t)p_1(t) + h_2(t)p_2(t))d(t) \in (d)$$

から $(f, g) \subset (d)$ であることが分かります。

逆に $p(t) \in (d)$ をとると, ある $q(t) \in \mathbf{K}[t]$ に対して

$$p(t) = d(t)q(t) = (a(t)f(t) + b(t)g(t))q(t) = a(t)q(t)f(t) + b(t)q(t)g(t) \in (f, g)$$

となりますから $(d) \subset (f, g)$ であることが分かります. □

(d) を $d(t)$ が生成する**イデアル**, (f, g) を $f(t)$ と $g(t)$ が生成するイデアルと呼びます。

定理 2.5. $c(t) \in \mathbf{K}[t]$ が $f(t)$ と $g(t)$ の公約式であるとしします :

$$c(t) | f(t), c(t) | g(t)$$

このとき $c(t) | d(t)$ が成立します。

Proof. 仮定から

$$f(t) = q_1(t)c(t), \quad g(t) = q_2(t)c(t)$$

がある $q_1(t), q_2(t) \in \mathbf{K}[t]$ に対して成立します. この状況で

$$d(t) = a(t)f(t) + b(t)g(t) = a(t)q_1(t)c(t) + b(t)q_2(t)c(t) = (a(t)q_1(t) + b(t)q_2(t))c(t)$$

となりますから, $c | d$ が分かります. □

ここで $c(t)$ として $f(t)$ と $g(t)$ に別の最大公約式 $d'(t)$ を考えます. $d'(t)$ は $f(t)$ と $g(t)$ の公約式なので定理 2.5 を用いると

$$d(t) = d'(t)\alpha$$

を満たす $\alpha \in \mathbf{K}^* := \mathbf{K} \setminus \{0\}$ が存在します. これが**最大公約式の一意性**です.

演習問題

I $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

を示しましょう。

II (1) $a, b \in \mathbf{R}$ が $a, b \geq 0$ を満たすとします。

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

を示しましょう。

(2) $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ が

$$a_1, \dots, a_n \geq 0$$

を満たすとします。

$$a_1 + \dots + a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

が成立することを示しましょう。

III (1) $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

を示しましょう。

(2) $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$ のとき

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

を示しましょう。

(3) $z \in \mathbf{C}$ であるとき

$$z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

を示しましょう。

(4) 実係数の多項式

$$f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

を考えます。すなわち上の式において

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$$

とします。このとき $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0$$

を示しましょう。

IV $P_1(x), P_2(x) \in \mathbf{K}[x]$ に対して

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = 0 \Rightarrow P_1(x) = 0 \text{ または } P_2(x) = 0$$

であることを示しましょう.

V $z, w \in \mathbf{C}$ が $z, w \neq 0$ を満たしているとします.

$$z = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad w = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

と極形式で表されるとき

$$zw = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z^{-1} = r_1^{-1} (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1))$$

となることを示しましょう.

VI

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \neq 1$$

であるとき

$$z^{\frac{1}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}$$

とします. このとき

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{z^{n+1} - 1}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})}$$

であることを用いて

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta, \quad \sum_{k=0}^n \sin k\theta$$

を求めましょう.

VII(1) $\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \alpha \neq \gamma$ とします. このとき

$$g(x) = \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

が

$$g(\alpha) = 1, \quad g(\beta) = g(\gamma) = 0$$

を満たすことを示しましょう.

(2) (1) において $A, B, C \in \mathbf{C}$ とします. f が 2 次多項式で

$$f(\alpha) = A, \quad f(\beta) = B, \quad f(\gamma) = C$$

ならば

$$f(x) = A \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + B \frac{(x - \alpha)(x - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + C \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

となることを示しましょう.

VIII $a, b \in \mathbf{R}$ とします.

$$f(x) = ax^4 - 2ax^3 + (a+1)x^2 - bx - b$$

において

$$f\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

とします.

(1) a, b を求めましょう.

(2) f の他の根を求めましょう.

IX

$$f(x) = x^{2n} + x^n + 1$$

が $x^2 + x + 1$ で割り切れるか調べましょう.

X

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

とします.

(1) $z^n - 1 = 0$ の解が $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ であることを示しましょう.

(2)

$$(1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \cdots (1 - \alpha^{n-1}) = n$$

となることを示しましょう.

XI 以下の多項式 $f(x), g(x)$ の最大共通因子を最高次数の係数が 1 として求めましょう.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = 4x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 11x + 3$$

XII $z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$ を満たす $z \in \mathbf{C}$ をすべて求めましょう.

XIII $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ が $ad - bc \neq 0$ を満たすとする. \mathbf{C} の部分集合 D を

$$D = \begin{cases} \mathbf{C} & (c = 0 \text{ のとき}) \\ \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & (c \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とします. 写像

$$f: D \rightarrow \mathbf{C} \quad z \mapsto w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

によって定義する.

(1) f が単射であることを示しましょう.

(2) $f(D)$ を求めましょう.

(3) 全単射 $f: D \rightarrow f(D)$ の逆写像 f^{-1} を求めましょう.

XIV \mathbf{C} の部分集合 $D := \mathbf{C} \setminus \{i\}$ 上で定義された写像

$$f: D \rightarrow \mathbf{C} \quad z \mapsto w = f(z) = \frac{1 - iz}{1 + iz}$$

について考えます.

- (1) $f(D) \subset \mathbf{C} \setminus \{-1\}$ であることを示しましょう.
- (2) $f(D) = \mathbf{C} \setminus \{-1\}$ であることを示しましょう.
- (3) f が単射であることを示しましょう.
- (4) 全単射 $f: D \rightarrow f(D)$ の逆写像を求めましょう.
- (5) $A = \{z \in D; |z - (1 + i)| = 1\}$ に対して $f(A)$ を求めましょう.
- (6) $f(\mathbf{R})$ を求めましょう.

XV 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ を差分方程式

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad a_0 = \alpha, a_1 = \beta$$

によって定義します. a_n を求めましょう. ただし解が最終的に虚数単位を含まないものにしましょう.

I $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

を示しましょう。

解答

$$z = a + ib, \quad w = c + id \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

と z と w の実部と虚部を表します。このとき

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

から

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2 \cdot |w|^2 \end{aligned}$$

が従います。 $|z|, |w|, |zw| \geq 0$ なので両辺の平方根をとると

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

であることが分かります。

II(1) $a, b \in \mathbf{R}$ が $a, b \geq 0$ を満たすとします。

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

を示しましょう。

(2) $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ が

$$a_1, \dots, a_n \geq 0$$

を満たすとします。

$$a_1 + \dots + a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$$

が成立することを示しましょう。

解答 (1) (\Leftarrow) は明らかですから (\Rightarrow) を証明します。

$a > 0$ とすると $b = -a < 0$ となりますから $b \geq 0$ に反します。従って $a \leq 0$ であることが分かります。ここで条件 $a \geq 0$ を用いると $a = 0$ が分かります。 $a + b = 0$ を仮定していますから $b = 0$ も従います。以上で

$$a = b = 0$$

であることを示しました.

(2) (\Leftarrow) は明らかですから (\Rightarrow) を証明します. 帰納法を用いて証明しますから $n-1$ で成立するとします.

$$a_1 + \dots + a_{n-1} \geq 0, \quad a_n \geq 0$$

が成立しますから (1) を用いると $a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = 0$ から

$$a_1 + \dots + a_{n-1} = 0, \quad a_n = 0$$

が従います. ($n-1$) の場合 (帰納法の仮定) を用いると $a_1 + \dots + a_{n-1} = 0$ から

$$a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$$

も従います. 以上で $a_1, \dots, a_n \geq 0$ の下で

$$a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$$

が従うことを示しました.

III (1) $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}, \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot w$$

を示しましょう.

(2) $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$ のとき

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

を示しましょう.

(3) $z \in \mathbf{C}$ であるとき

$$z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

を示しましょう.

解答 (1)

$$z = a + ib, \quad w = c + id \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

と z と w の実部と虚部を表します. このとき

$$z \pm w = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

から

$$\begin{aligned} \overline{z \pm w} &= (a \pm c) - i(b \pm d) \\ \bar{z} \pm \bar{w} &= \overline{a + ib} \pm \overline{c + id} \\ &= (a - ib) \pm (c - di) \\ &= (a \pm c) - i(b \pm d) \end{aligned}$$

となるので

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$$

が従います.

(2) 次に

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(ac - bd) + i(bc + ad)} \\ &= (ac - bd) - i(bc + ad) \\ \bar{z} \cdot \bar{w} &= (a - ib)(c - id) \\ &= (ac - bd) - i(bc + ad)\end{aligned}$$

から

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

が従います. 最後に

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

から

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}$$

が分かります.

(3)

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a - ib} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}$$

が分かりますから

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

が従います.

(3) $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbf{R}$) とします. $z = a \in \mathbf{R}$ とすると

$$\bar{z} = a = z$$

から $z = \bar{z}$ が従います. 逆に $z = \bar{z}$ とすると

$$a + ib = a - ib \quad \text{から} \quad b = 0$$

が従いますから, $z = a \in \mathbf{R}$ であることが分かります.

III(4) 実係数の多項式

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

を考えます. すなわち上の式において

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$$

とします. このとき $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0$$

を示しましょう.

解答 $f(\alpha) = 0$ すなわち

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad (1)$$

が成立するとします.

$$\overline{\alpha^k} = (\bar{\alpha})^k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

が成立することを帰納的に示せますから, (1) の両辺の複素共役をとると

$$\begin{aligned} \overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0} &= \bar{a}_n \cdot \bar{\alpha}^n + \bar{a}_{n-1} \cdot \bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1 \cdot \bar{\alpha} + \bar{a}_0 \\ &= a_n \cdot \bar{\alpha}^n + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 \\ &= f(\bar{\alpha}) = 0 \end{aligned}$$

が分かります.

IV $P_1(x), P_2(x) \in \mathbf{K}[x]$ に対して

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = 0 \Rightarrow P_1(x) = 0 \text{ または } P_2(x) = 0$$

であることを示しましょう.

解答 P_1, P_2 が $\deg(P_1), \deg(P_2) \geq 0$ とすると

$$\deg(P_1 P_2) = \deg(P_1) + \deg(P_2) \geq 0$$

となり, $P_1 P_2 = 0$ となりません. 従って

$$\deg(P_1) = -\infty \text{ または } \deg(P_2) = -\infty$$

すなわち

$$P_1 = 0 \quad \text{または} \quad P_2 = 0$$

となります.

$\forall z, w \in \mathbf{C}$ が $z, w \neq 0$ を満たしているとします.

$$z = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad w = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

と極形式で表されるとき

$$zw = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z^{-1} = r_1^{-1} (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1))$$

となることを示しましょう.

解答

$$\begin{aligned} zw &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)} \\ &= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\cos \theta_1 - i \sin \theta_1}{(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)} \\ &= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)}{\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1} = \frac{1}{r_1} \cdot (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)) \end{aligned}$$

VI

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \neq 1$$

であるとき

$$z^{\frac{1}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}$$

とします. このとき

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{z^{n+1} - 1}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})}$$

であることを用いて

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta, \quad \sum_{k=0}^n \sin k\theta$$

を求めましょう.

解答 $z = \cos \theta + i \sin \theta \neq 1$ のとき帰納法を用いると

$$z^k = \cos k\theta + i \sin k\theta \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成立することが分かります. さらに

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos k\theta + i \sum_{k=0}^n \sin k\theta &= \sum_{k=0}^n (\cos k\theta + i \sin k\theta) \\ &= \sum_{k=0}^n z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \\ &= \frac{z^n - 1}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})} = \frac{z^{\frac{n+1}{2}}(z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}})}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})} = z^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right) \cdot \frac{2\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{2\sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + i \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

から

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad \sum_{k=0}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

であることが分かります.

VII(1) $\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \alpha \neq \gamma$ とします. このとき

$$g(x) = \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

が

$$g(\alpha) = 1, \quad g(\beta) = g(\gamma) = 0$$

を満たすことを示しましょう.

(2) (1) において $A, B, C \in \mathbf{C}$ とします. f が 2 次多項式で

$$f(\alpha) = A, \quad f(\beta) = B, \quad f(\gamma) = C$$

ならば

$$f(x) = A \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + B \frac{(x - \alpha)(x - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + C \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

となることを示しましょう.

解答 (1) 省略

(2)

$$h(x) = A \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + B \frac{(x - \alpha)(x - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + C \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

と定義します. このとき

$$h(\alpha) = A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = A$$

$$h(\beta) = A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 = B$$

$$h(\gamma) = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 = C$$

となりますから

$$(f - h)(\alpha) = (f - h)(\beta) = (f - h)(\gamma) = 0$$

が従います. さらに

$$\deg(f - h) \leq 2$$

が成立しますから

$$f - h = 0$$

であることが分かります.

VIII $a, b \in \mathbf{R}$ とします.

$$f(x) = ax^4 - 2ax^3 + (a+1)x^2 - bx - b$$

において

$$f\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

とします.

(1) a, b を求めましょう.

(2) f の他の根を求めましょう.

解答 $x_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ とします. このとき

$$\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \quad \text{から} \quad x_0^2 - x_0 + 1 = 0$$

が従います. 筆算

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad \quad \begin{array}{r} ax^2 - ax + 1 - a \\ \hline ax^4 - 2ax^3 + (a+1)x^2 - bx - b \\ \hline ax^4 - ax^3 + ax^2 \\ \hline - ax^3 + x^2 - bx - b \\ \hline - ax^3 + ax^2 - ax \\ \hline (1-a)x^2 - (b-a)x - b \\ (1-a)x^2 - (1-a)x + 1 - a \\ \hline (1-b)x + a - b - 1 \end{array} \\
 x^2 - x + 1 \quad)
 \end{array}$$

から

$$f(x) = (ax^2 - ax + (1-a))(x^2 - x + 1) + (1-b)x + a - b - 1 \quad (1)$$

と割り算できます. $x = x_0$ を代入すると

$$0 = f(x_0) = (1-b)x_0 + a - b - 1$$

を得ます. $b \neq 1$ ならば $x_0 \in \mathbf{R}$ となりますから $b = 1$ であることが分かります. さらに $a - b - 1 = 0$ も成立しますから $a = 2$ であることが分かります. (1) は

$$f(x) = (2x^2 - 2x + 1)(x^2 - x + 1)$$

となりますから, x_0 と異なる解は

$$x = \frac{1 \pm i}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

であることが分かります.

別解 $x_0^2 - x_0 + 1 = 0$ の両辺に $x_0 + 1$ を掛けると

$$x_0^3 + 1 = 0 \quad \text{従って} \quad x_0^3 = -1$$

であることが分かります. これから

$$\begin{aligned} f(x_0) &= ax_0^4 - 2ax_0^3 + (a+1)x_0^2 - bx_0 - b \\ &= -ax_0 + 2a + (a+1)(x_0 - 1) - bx_0 - b \\ &= (1-b)x_0 + a - b - 1 = 0 \end{aligned}$$

が従います.

IX

$$f(x) = x^{2n} + x^n + 1$$

が $x^2 + x + 1$ で割り切れるか調べましょう.

解答

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

とおくと

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

となります. ここで $f(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割り算しておきます. すなわち

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1) + Ax + B \tag{1}$$

を満たす $A, B \in \mathbf{R}$ が存在します. ここで $x = \omega$ を代入すると

$$f(\omega) = A\omega + B \tag{2}$$

となります. そこで $f(\omega)$ を n を 3 で割った余りで場合分けして求めます.

(i) $n = 3k$ のとき

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{6k} + \omega^{3k} + 1 = (\omega^3)^{2k} + (\omega^3)^k + 1 \\ &= 1^{2k} + 1^k + 1 = 3 \end{aligned}$$

から (2) は

$$A\omega + B = 3$$

となります. これを $A\omega + (B - 3) = 0$ とすると $\omega \notin \mathbf{R}$ から $A = 0, B = 3$ となりますから (1) は

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1) + 3$$

となります.

(ii) $n = 3k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{6k+2} + \omega^{3k+1} + 1 = (\omega^3)^{2k} \omega^2 + (\omega^3)^k \omega + 1 \\ &= 1^{2k} \omega^2 + 1^k \omega + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

から (2) は

$$A\omega + B = 0$$

となります. $\omega \notin \mathbf{R}$ から $A = 0, B = 0$ となりますから (1) は

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1)$$

となります.

(iii) $n = 3k + 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{6k+4} + \omega^{3k+2} + 1 = (\omega^3)^{2k+1} \omega + (\omega^3)^k \omega^2 + 1 \\ &= 1^{2k+1} \omega + 1^k \omega^2 + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

から (2) は

$$A\omega + B = 0$$

となります. $\omega \notin \mathbf{R}$ から $A = 0, B = 0$ となりますから (1) は

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x + 1)$$

となります.

以上から $f(x)$ が $x^2 + x + 1$ で割り切れる必要十分条件は n が 3 で割り切れないことが示されました.

X

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

とします.

(1) $z^n - 1 = 0$ の解が $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ であることを示しましょう.

(2)

$$(1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \cdots (1 - \alpha^{n-1}) = n$$

となることを示しましょう.

解答 $z^n = 1$ のとき $|z|^n = 1$ から $|z| = 1$ であることが分かります. 従って

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

上の計算から共通因子で最高次数の係数が1であるものは $x^2 - x + 1$ であることが分かります。より詳しくは以下のようにして理解します。

$$\begin{aligned} g(x) - 4f(x) &= -4x^3 - 4x^5 + 5x - 9 (= r_1(x) \text{とします}) \\ 4f(x) - xr_1(x) &= -13x^3 + 25x^2 - 25x + 12 \\ \text{両辺を4倍して} \\ 16f(x) - 4xr_1(x) &= -52x^3 + 100x^2 - 100x + 48 \\ 16f(x) - 4xr_1(x) - 13r_1(x) &= 16f(x) - (4x + 13)r_1(x) \\ &= 165x^2 - 165x + 165 = 165(x^2 - x + 1) \\ r_1(x) &= -(4x + 9)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

XII $z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$ を満たす $z \in \mathbf{C}$ をすべて求めましょう。

解答

$$z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$$

の両辺の絶対値をとると

$$|z|^4 = 8 \cdot 2 = 16$$

となりますから $|z| = 2$ であることが分かります。 $w = \frac{z}{2}$ と定めると

$$w^4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2}{3}\pi} \quad (1)$$

が成立します。 $|w| = 1$ が成立しますから

$$w = \cos \theta + i \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

である $\theta \in \mathbf{R}$ が存在します。(1) から

$$e^{i4\theta} = e^{i\frac{2}{3}\pi}, \quad 0 \leq 4\theta < 8\pi$$

から

$$4\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}, \frac{20\pi}{3},$$

すなわち

$$\theta = \frac{2\pi}{12}, \frac{8\pi}{12}, \frac{14\pi}{12}, \frac{20\pi}{12}$$

となります。以上で

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, 2e^{i\frac{7\pi}{6}}, 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

であることが分かりました。