連立方程式の同値変形

例えば

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & \cdots ① \\ cx + dy = \beta & \cdots ② \end{cases}$$

と考える. ①かつ②から

①$' := p \times$ ① $+ q \times$ ②

②$' := r \times$ ① $+ s \times$ ②

と導くが ①かつ② と ①$'$かつ②$'$ は同値なのか?

$ps - qr \neq 0$ ならば ①かつ② $\equiv$ ①$'$かつ②$'$

が成立する. これを示そう.

①$'' := A \times$ ①$' + B \times$ ②$' = (Ap + Br)$ ① $+ (Aq + Bs)$ ②

②$'' := C \times$ ①$' + D \times$ ②$' = (Cp + Dr)$ ① $+ (Cq + Ds)$ ②

と定める. ここで $A = s,\ B = -q\ ;\ C = -r,\ D = p$

を選ぶと

①$'' = (ps - qr) \times$ ①

②$'' = (ps - qr) \times$ ②

となる. $ps - qr \neq 0$ を前提としているので ①$''$, ②$''$ に $\dfrac{1}{ps - qr}$ 倍して

①$''' := \dfrac{1}{ps - qr} \times$ ①$'' =$ ①

②$''' := \dfrac{1}{ps - qr} \times$ ②$'' =$ ②

となる.

例えば

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & ① \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{b} & ② \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} = \vec{c} & ③ \end{cases}$$

を $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が満たすとしよう。

①' := ①

②' := (−2)×① + ②　　$3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b}$

③' := (−3)×① + ②　　$\vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c}$

とすると

① かつ ② かつ ③ ≡ ①' かつ ②' かつ ③'

となる。前のページの結果から 例えば

① かつ ② ≡ ①' かつ ②'，① かつ ③ ≡ ①' かつ ③'

が従うからである。(1ページの基本変形 Ⅰ を用いている。)

さらに

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & ①' \\ 3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b} & ②' \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & ③' \end{cases}$$

において

①'' = ①'，②'' = ③'，③'' = ②'

とすると ①' かつ ②' かつ ③' は

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & ①'' \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} \\ 3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b} \end{cases}$$

と同値である。以下は この資料の4ページを参照すること。

基本変形

Ⅰ $i \neq j$

$\cdots \textcircled{i} \cdots \textcircled{j}$

↓ ↑ 逆は $\textcircled{j}'$ に $(-\lambda)\textcircled{i}$ を加える.

$\cdots \textcircled{i} \cdots \textcircled{j} + \lambda\textcircled{i} = \textcircled{j}'$

Ⅱ $\lambda \neq 0$

$\cdots \textcircled{i} \cdots$

↓ ↑ 逆は $\textcircled{i}'$ を $\frac{1}{\lambda}$ 倍

$\cdots \lambda\textcircled{i} \cdots$

$\lambda\textcircled{i} = \textcircled{i}'$

Ⅲ $i \neq j$

$\cdots \textcircled{i} \cdots \textcircled{j}$

↓ ↑ $\textcircled{i}'$ と $\textcircled{j}'$ を交換.

$\cdots \textcircled{j} \cdots \textcircled{i} \cdots$

$\textcircled{j} = \textcircled{i}'$, $\textcircled{i} = \textcircled{j}'$

$\textcircled{i} \neq \textcircled{j}$ $\quad \cdots \textcircled{i} \cdots \textcircled{j}$

$ad - bc \neq 0$ のとき, ※は同値な変形

↓※

$\cdots \textcircled{i}' := a \times \textcircled{i} + b \times \textcircled{j} \cdots \textcircled{j}' := c \times \textcircled{i} + d \times \textcircled{j}$

↓

$\cdots x\textcircled{i}' + y\textcircled{j}' \cdots z\textcircled{i}' + w\textcircled{j}' = (az + cw)\textcircled{i}' + (bz + dw)\textcircled{j}'$

$x\textcircled{i}' + y\textcircled{j}' = (ax + cy)\textcircled{i} + (bx + dy)\textcircled{j}$

2023年4月16日修正版

④

演習 1.08（教科書 5p） $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbf{R}^n$ が関係式

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1) \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{b} & (2) \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} = \vec{c} & (3) \end{cases}$$

満たしているとします．このとき $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表しましょう．

解答

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1) \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{b} & (2) \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} = \vec{c} & (3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1)_1 = (1) \\ 3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b} & (2)_1 = (2) - 2 \times (1) \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (3)_1 = (3) - 3 \times (1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1)_2 = (1)_1 \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (2)_2 = (3)_1 \\ 3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b} & (3)_2 = (2)_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{x} - 3\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{c} & (1)_3 = (1)_2 + (2)_2 \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (2)_3 = (2)_2 \\ 10\vec{z} = 7\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} & (3)_3 = (3)_2 - 3 \times (2)_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{x} - 3\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{c} & (1)_4 = (1)_3 \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (2)_4 = (2)_3 \\ \vec{z} = \frac{7}{10}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} - \frac{3}{10}\vec{c} & (3)_4 = \frac{1}{10} \times (3)_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \frac{1}{10}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b} + \frac{1}{10}\vec{c} & (1)_5 = (1)_4 + 3 \times (3)_4 \\ \vec{y} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} & (2)_5 = (2)_4 + 5 \times (3)_4 \\ \vec{z} = \frac{7}{10}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} - \frac{3}{10}\vec{c} & (3)_5 = (3)_4 \end{cases}$$