

Part 02 クラメールの公式

Intro 2023 SL02 Part 02

Nobuyuki TOSE

April 17, 2023

プラン

- Part 01 極大・極小と停留点（極大・極小の必要条件）（補足）
- Part 02 クラメールの公式
- Part 03 接平面
- Part 04 2次正方行列（入門）

Part 02

クラメールの公式

クラメールの公式 CT 205-206p

連立1次方程式

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \cdots(1) \\ cx + dy = \beta \cdots(2) \end{cases}$$

を考える. y を消去するために $(1) \times d - (2) \times b$ を考える.

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad adx \quad + \quad bdy \quad = \quad \alpha d \\ -) \quad \quad \quad bcx \quad + \quad bdy \quad = \quad \beta b \\ \hline (ad - bc)x \quad \quad \quad = \quad \alpha d - \beta b \end{array}$$

x を消去するために $(1) \times c - (2) \times a$ を考える.

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad acx \quad + \quad bcy \quad = \quad \alpha c \\ -) \quad \quad \quad acx \quad + \quad ady \quad = \quad \beta a \\ \hline (bc - ad)y \quad \quad \quad = \quad \alpha c - \beta a \end{array}$$

行列式・クラメールの公式

行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

これを用いると

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

特に $D := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

これをクラメールの公式と言います。

クラメールの公式-例

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 4x + 4y = 8 \end{cases}$$

を解きます.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -8 \neq 0$$

からクラメールの公式が適用できます. 実際

$$x = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(6 \cdot 4 - 8 \cdot 4) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$

$$y = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(2 \cdot 8 - 4 \cdot 6) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$