

# 偏微分係数と極大・極小の必要条件

Intro 2023 L01, Part 1–Part 3

Nobuyuki TOSE

April 10, 2023

# プラン

Part 01 経済学における基本的な問題

Part 02 開集合

Part 03 極大・極小と停留点（極大・極小の必要条件）

# Part 01

## ミクロ経済学における 基本的な問題

# ミクロ経済学における基本的な問題

ミクロ経済学では最初に以下の基本的な問題を学びます。

- 生産理論 (Production Theory)
- 消費者理論 (Consumer Theory)

# 生産理論 (Production Theory)

生産物 (product)  $C$  が生産要素 (production elements)  $A, B$  から生産されるとします.  $A, B, C$  の価格はそれぞれ  $p, q, r$  とします.  $A$  と  $B$  をそれぞれ  $x$  と  $y$  投入するとき  $C$  が  $z = f(x, y)$  得られるとします.

このとき  $f(x, y)$  を生産関数 (production function) と呼ばれます. またこの状況で利潤関数 (profit function) を

$$\pi(x, y) = rf(x, y) - px - qy$$

と定義します.

生産理論の最初のステップは, 利潤関数  $\pi(x, y)$  を最大化して生産要素需要関数

$$x = x(p, q, r), y = y(p, q, r)$$

を求めることにあります.

# 消費者理論 (Consumer Theory)

商品 (Goods) A,B があるとします. A を  $x$ , B を  $y$  購入するとき, 消費者が**効用関数** (utility function)  $u(x, y)$  の効用を得るとします. さらに A, B の価格が  $p, q$  であるとします.

消費者が予算  $I$  を全額消費して A, B を購入するとします. ここでの問題は**予算制約**と呼ばれる制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で  $u(x, y)$  を最大化して**需要関数** (demand function)

$$x = x(p, q, I), y = y(p, q, I)$$

と**所得の限界効用** (marginal utility of income)

$$\lambda = \lambda(p, q, I)$$

を得ることです.

# Part 02

## 開集合

# 開円盤 CT 246p

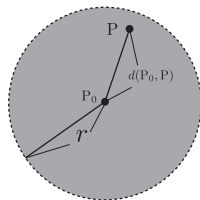
## 開円盤 (Open Disc)

$r > 0, P_0(a, b) \in \mathbf{R}^2$  に対して

$$B_r(P_0) := \{P \in \mathbf{R}^2; d(P, P_0) < r\}$$

を中心  $P_0$ , 半径  $r > 0$  の開円盤と呼びます。ここで  $d(P_0, P)$  は 2 点  $P_0, P$  の距離です。  $P(x, y)$  のとき

$$d(P_0, P) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$



注意今後「 $P_0$  の近くで～」という言い方をしますが、これはある正数  $r > 0$  に対して

任意の  $P \in B_r(P_0)$  において～



# 開集合 (Open subsets) CT 246p

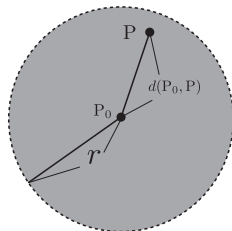
## Definition

$\mathbf{R}^2$  の部分集合  $U$  があるとします.  $U$  が開集合であるとは任意の  $P_0 \in U$  に対して  $r > 0$  が存在して

$$B_r(P_0) := \{P \in \mathbf{R}^2; d(P, P_0) < r\} \subset U$$

が成立することです.

**注意**  $U$  の任意の点  $P_0$  の周りが  $U$  に含まれているということです.



# 命題・命題関数

命題とは真偽が明らかな文のことです. 例えば

$2 > 1$  真 (Truth)

$1 > 2$  偽 (False)

集合  $X$  上の**命題関数**とは  $x \in X$  に対して命題  $P(x)$  を対応させるものです. 例えば  $X = \mathbf{R}$  のとき

$P(x) : 1 < x$

と定めると

$P(0) : 1 < 0$  偽

$P(2) : 1 < 2$  真

となります.

## 命題関数 (2)

集合  $X$  上の命題関数  $P(x)$  があるとき付随して命題を定めることができます.

$$\forall x \in X (P(x))$$

はすべての  $x \in X$  に対して  $P(x)$  が真であるという命題です. 前ページの例では  $P(0)$  が偽ですから  $\forall x \in X (P(x))$  は偽です.

さらに

$$\exists x \in X (P(x))$$

はある  $x \in X$  に対して  $P(x)$  が真であるという命題です. 前ページの例では  $P(2)$  が真ですから  $\exists x \in X (P(x))$  は真です.

# 開集合の例

以下の  $\mathbf{R}^2$  の部分集合は開集合です.

- $\mathbf{R}^2$
- 上半平面

$$U_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y > 0\}$$

- 第1象限 (1st Quadrant)

$$\mathbf{R}_{++}^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x, y > 0\}$$

- 開円盤

$$B_r(P_0) := \{P \in \mathbf{R}^2; d(P, P_0) < r\}$$

# 開集合-反例

以下の  $\mathbf{R}^2$  の部分集合は開集合ではありません。

- $P_0 \in \mathbf{R}^2$  のなす集合  $\{P_0\}$
- 閉上半平面

$$F_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y \geq 0\}$$

- 閉第1象限

$$\overline{\mathbf{R}_{++}^2} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x, y \geq 0\}$$

- 閉円盤

$$\overline{B_r(P_0)} := \{P \in \mathbf{R}^2; d(P, P_0) \leq r\}$$

# Part 03

## 偏微分係数と極大・極小

# Partial Differentiation

$\mathbf{R}^2$  の開集合  $U$  上の関数

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}$$

が定義されているとします。

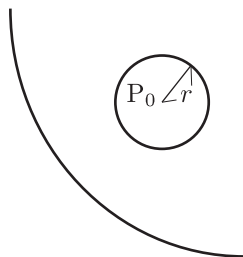
$P_0(a, b) \in U$  に対して  $x$  の関数

$$F(x) := f(x, b)$$

を  $x = a$  の近くで定義できます。さらに  $y$  の関数

$$G(y) := f(a, y)$$

を  $y = b$  の近くで定義することができます。



# Partial Differentiation

この状況で、定義の中の極限が存在すれば、 $x$  と  $y$  に関する偏微分係数を

$$f_x(a, b) := F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

$$f_y(a, b) := G'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

と定義できます。



# Partial Differentiation-An example

$\mathbf{R}^2$  上の関数

$$f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + y^3$$

について考えます.  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  の周りで考えるとして

$$F(x) := f(x, b) = x^3 + 2xb^2 + b^3, \quad G(y) := f(a, y) = a^3 + 2ay^2 + y^3$$

と定義します. このとき

$$F'(x) = 3x^2 + 2b^2, \quad \text{and} \quad G'(y) = 4ay + 3y^2$$

から

$$f_x(a, b) = 3a^2 + 2b^2, \quad f_y(a, b) = 4ab + 3b^2$$

を得ます.

# 1変数の極大点（極小点）-定義

开区間  $]a, b[$  上の関数  $f : ]a, b[ \Rightarrow \mathbf{R}$  が与えられているとき

$f$  が  $t = c$  で極小 (resp. 極大)

$\Leftrightarrow$  ある  $\delta > 0$  に対して  $f$  が  $]c - \delta, c + \delta[$  上最小 (resp. 最大)

$\Leftrightarrow$  ある  $\delta > 0$  に対して

$$f(t) \geq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

$$\text{resp. } f(t) \leq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

# 1変数の極大点（極小点）CT 104-105p

微分可能な1変数関数の極小点（極大点）に関する次の定理を紹介します。

## Theorem

微分可能な関数  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$  があるとします。  $f$  が  $c \in ]a, b[$  で極小（極大）ならば

$$f'(c) = 0$$

**注意** これは中身を理解して欲しい定理です。

# Minimal (Maximal) Points CT 268p

$\mathbf{R}^2$  の開集合  $U$  上の関数

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}$$

に対して、 $f$  が  $P_0(a, b)$  で極小 (resp. 極大) であるとはある  $\delta > 0$  が存在して

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad ((x, y) \in B_\delta(P_0))$$

(resp.

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad ((x, y) \in B_\delta(P_0))$$

)

が成立するときです。

# Minimal (Maximal) Points–Theorem CT 269p

$\mathbf{R}^2$  の開集合  $U$  上の関数

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}$$

が  $U$  の各点  $P \in U$  で  $x, y$  について偏微分できると仮定します.

## Theorem

$f$  が  $P_0(a, b) \in U$  で極小 (極大) ならば

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \tag{1}$$

が成立します.

この状況で (1) を満たす点  $P_0(a, b)$  を  $f$  の**停留点**と呼びます.

# Minimal (Maximal) Points–Sketch of proof

$f$  が  $P_0(a, b)$  で極小とします. このとき  $F(x) = f(x, b)$  は  $x = a$  で極小となります. 実際

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad ((x, y) \in B_\delta(P_0))$$

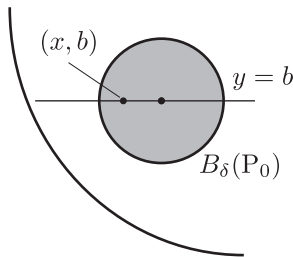
から  $f(x, b) \geq f(a, b)$  ( $a - \delta < x < a + \delta$ )  
従って

$$F(x) \geq F(a) \quad (a - \delta < x < a + \delta)$$

となります. よって

$$F'(a) = 0 \quad \text{従って} \quad f_x(a, b) = 0$$

であることが分かります.



# Minimal (Maximal) Points—An example

関数

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$$

について考えます。

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x + 4y \cdot 1 + 0 - 6 - 0 \\ &= 2x + 4y - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= 0 + 4x \cdot 1 + 4y - 0 - 8 \\ &= 4x + 4y - 8 = 0 \end{aligned}$$

を解くと、 $(x, y) = (1, 1)$  が  $f$  の唯一の停留点であることが分かります。